

Markov chains for physicists

Andriy Zhugayevych, Andriy Yurachkivsky

25 квітня 2013 р.

Зміст

1	Вступ	1
2	Постановка задачі і загальні властивості	2
2.1	Базове рівняння	2
2.2	Операторне подання. Спектр оператора A	3
2.3	Функція Гріна	4
3	Локальність функції Гріна	5
4	Теорія збурень кінетичного рівняння	7
5	Залежність функції Гріна від коефіцієнтів	8
6	Наближення скінченної ґратки	9
7	Узагальнені марковські ланцюги	11
8	Квазісиметричні ланцюги. Класифікація рівнянь	14
9	Дискретний час. Напівмарковські процеси	16
10	Чисельні методи	17
10.1	Part 1	17
10.2	Part 2	18
10.3	Time discretization of kinetic equation: “blind ant” vs. “myopic ant”	19
10.4	Series expansion at zero	20
11	Підсумок (неготовий)	20
A	Формули для випадку дискретного часу	21
B	Винесені доведення	21

1 Вступ

Кінетичні рівняння з дискретним простором станів зустрічаються надзвичайно часто у фізиці, описуючи, наприклад, розподіл квантової системи по станах (кінетичне рівняння Паулі), стрибокове транспортування частинок (випадкове блукання), релаксацію системи до рівноважного стану, поширення шуму в біологічних системах чи інформаційних мережах тощо. В своїй основі вони базуються на гіпотезі про відсутність післядії (марковість), хоча прості модифікації їх дозволяють урахувати й ефекти пам’яті (узагальнене кінетичне рівняння зі згортокою по часу, що еквівалентно складнішому розподілу часу між стрибками (напівмарковські ланцюги, STRW)) і кореляцію стрибків (через розширення простору станів) [1, 2]. Ми зупинимося на кінетичному рівнянні з дискретними станами n і неперервним часом t в наступній загальній формі

$$\dot{c}_n = -c_n \nu_n + \sum_m (c_m w_{mn} - c_n w_{nm}) + f_n(t), \quad (1)$$

яке зручно інтерпретувати таким чином: $c_n(t)$ – середнє число частинок у стані n (це може бути квантовий стан, просторове положення частинки тощо), w_{nm} – інтенсивність (обернений середній час переходу) переходів частинки зі стану n у стан m (природно, w_{nm} невід’ємні), ν_n – інтенсивність затухання (зникання) (якщо $\nu_n > 0$) чи розмноження (якщо $\nu_n < 0$) частинок у стані n , $f_n(t)$ – інтенсивність народжування (якщо $f_n > 0$) чи поглинання (якщо $f_n < 0$) частинок у стані n . Рівняння з дискретним часом (разом із узагальненим кінетичним рівнянням) розглянемо в