Конспект з теорії диференціальних рівнянь

Андрій Жугаєвич (http://zhugayevych.me)

28 липня 2022 р.

Передмова

Конспект складено за лекціями професора А. П. Юрачківського в період 2000-2007 років. Номери задач приведені з книги [1], якщо номеру передує літера "Г", то це задача з [2], якщо латинська літера "A", то умова наведена в розділі "Задачі".

§1. Вступ

Класифікація диференціальних рівнянь: скалярні та векторні, порядок, явні та неявні, лінійні та нелінійні. Розв'язки диференціального рівняння: частинний та загальний розв'язки, додаткові умови, задача Коші, крайова задача, інтеграл рівняння, перший інтеграл, інтегральні криві.

§2. Інтегровні рівняння першого порядку та звідні до них

2.1. Існування і єдиність розв'язку задачі Коші. Особливі розв'язки

Достатніми умовами існування і єдиності розв'язку явної задачі Коші $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ є, відповідно, неперервність (по обом змінним) і диференційовність по y функції f в околі точки (x_0, y_0). Взагалі кажучи, умову єдиності можна послабити до умови Ліпшиця: $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant M|y_1 - y_2|$, однак слід мати на увазі, що все одно клас рівнянь, для яких існує розв'язок набагато ширший, наприклад, для рівняння $g(y)y' = f(x)$ достатньо лише інтегровності функцій f і g (аналогічна ситуація і для єдиності).

Розв'язки рівняння $y' = f(x,y)$, через кожну точку інтегральної кривої яких проходять щонайменше два різні розв'язки задачі Коші (тобто порушується єдиність розв'язку), називаються *особливими*. Їх можна знайти з умови порушення умов єдиності:

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ f_y(x,y) = \infty. \end{cases}$$

Для систем явних рівнянь першого порядку і явних скалярних рівнянь $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ умови існування і єдиності ті ж: неперервність функції f по всім змінним в сукупності і диференційовність по y та всім її похідним. Особливі розв'язки знаходяться з кожної з умов

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \\ \partial f/\partial y^{(i)} = \infty, \end{cases} \qquad i = \overline{0, n-1}.$$

Для неявного рівняння $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ умовами існування і єдиності є неперервність функції F по всім змінним в сукупності, диференційовність по y та всім її похідним і умова $\partial F/\partial y^{(n)} \neq 0$. Особливі розв'язки знаходяться з кожної з умов $\partial F/\partial y^{(i)} = \infty$, $i = \overline{0, n-1}$, а також з умови $\partial F/\partial y^{(n)} = 0$.

2.2. Елементарні рівняння

Рівняння *з відокремними змінними* $g(y)\,\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x$ розв'язуються безпосереднім інтегруванням.

- *Задачі* — прості: 51, 52; задача Коші: 53, 54, 55, 56, 57, 58, 60; лінійна заміна $z = ax + by$: 62, 64, 65; умови на нескінченності: 66, 67.

Однорідні рівняння $y' = f(y/x)$, а також *узагальнено однорідні*, тобто інваріантні відносно масштабного перетворення $x \to \lambda x,\ y \to \lambda^\alpha y$, розв'язуються заміною $y = zx^\alpha$.

- *Задачі* — прості: 101, 103, 108; типу $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_3}\right)$, заміна $x \to x - \alpha,\ y \to y - \beta$: 113, 118; типу $y' = y/x + g(x)f(y/x)$; узагальнено однорідні: 125, 127, 128, 129.

Лінійні рівняння $y' + p(x)y = q(x)$ розв'язуються методом варіювання сталих або використанням явної формули

$$y(x) = \left(y(x_0) + \int_{x_0}^{x} q(z) e^{\int_{x_0}^{z} p(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}z \right) e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\,\mathrm{d}s}.$$

- *Задачі* — прості: 136, 137, 138, 139, 140, 141; лінійні відносно $x(y)$: 146, 148; додаткові: 183, 184.

Рівняння *Бернуллі* $y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$ зводиться до лінійного заміною $y = z^{1/(1-\alpha)}$. Рівняння *Ріккаті* $y' + p(x)y = q(x)y^2 + r(x)$ при відомому частковому розв'язку y_1 зводиться до рівняння Бернуллі заміною $y = z + y_1$

- *Задачі* — Бернуллі: 157, 158; Ріккаті: 167, 170.

2.3. Виділення повних диференціалів

Рівняння *в повних диференціалах* $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}\varphi = 0$ розв'язується подвійним інтегруванням.

- *Задачі* — 186, 187, 192, 194.

В загальному випадку рівняння $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0$ має *інтегрувальний множник* τ такий, що $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \tau\,\mathrm{d}\varphi$. Він задовольняє рівняння $P\tau_y - Q\tau_x + \Gamma\tau = 0$, де $\Gamma = P_y - Q_x$. Найефективнішим способом відшукання τ є метод *вирівнювання інтегрувальних множників*. Збираємо доданки в дві-три групи, для яких легко виділити повний диференціал: $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \sum_i P_i\,\mathrm{d}x + Q_i\,\mathrm{d}y = \sum_i \tau_i\,\mathrm{d}\varphi_i$. Якщо задача не стає тривіальною, переходимо до нових змінних типу φ_i і повторюємо ще раз всю процедуру в нових змінних, або ж з самого початку перегруповуємо доданки іншим способом. Для ефективного використання даного методу потрібно вміти легко виділяти повний диференціал у виразах виду

$$\alpha y\,\mathrm{d}x + \beta x\,\mathrm{d}y = x^{1-\alpha}y^{1-\beta}\,\mathrm{d}(x^\alpha y^\beta),$$
$$ay\,\mathrm{d}x + \beta\,\mathrm{d}y = e^{-ax}y^{1-\beta}\,\mathrm{d}(e^{ax}y^\beta),$$
$$(\alpha + ax)y\,\mathrm{d}x + (\beta + by)x\,\mathrm{d}y = x^{1-\alpha}y^{1-\beta}e^{-ax-by}\,\mathrm{d}(x^\alpha y^\beta e^{ax+by}).$$

Приклад: $(x/y + y)\,\mathrm{d}x + (x - y/x)\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}(xy) + (1/xy)(x^2\,\mathrm{d}x - y^2\,\mathrm{d}y) = 0$.

• *Задачі* — прості: 195, 196, 197, 198, 204, 206, 210, 214, 216; степеневі: 199, 200, 202, 203, 209, 211, 212, 215, 217, 218, 220; показникові: 207; складні: 201, 205, 208, 213, 219.

Є ще два спеціальних методи. Перший: якщо існують такі функції $a(y)$ і $b(x)$, що $\Gamma = aP - bQ$, то підстановкою $\tau(x, y) = \phi(x)\psi(y)$, рівняння на τ зводиться до вигляду $P\,(\psi'/\psi + a(y)) - QP\,(\phi'/\phi + b(x)) = 0$. Тоді $\psi = \exp(-\int a\,\mathrm{d}y)$ і $\phi = \exp(-\int b\,\mathrm{d}x)$. Приклад: $(x/y+y)\,\mathrm{d}x+(x-y/x)\,\mathrm{d}y = 0$, $a = -1/y$, $b = -1/x$. Другий: якщо легко вгадати таку функцію $\omega(x, y)$, що $\Gamma = \rho(\omega)(\omega_y P - \omega_x Q)$, де ρ залежить лише від ω, то $\tau = \exp(-\int \rho\,\mathrm{d}\omega)$. Приклад: $(x/y + y)\,\mathrm{d}x + (x - y/x)\,\mathrm{d}y = 0$, $\omega = xy$.

2.4. Неявні рівняння першого порядку

Щоб розв'язати неявне диференціальне рівняння $F(x, y, y') = 0$, необхідно розв'язати його як алгебраїчне рівняння трьох змінних x, y, y'. В найзагальнішому випадку достатньо знайти розв'язок останнього в явному параметричному вигляді: $x = \phi(p, q)$, $y = \psi(p, q)$, $y' = \omega(p, q)$. Тоді в нових змінних (p, q), одержимо явне диференціальне рівняння:

$$\omega = \frac{\psi_p\,\mathrm{d}p + \psi_q\,\mathrm{d}q}{\phi_p\,\mathrm{d}p + \phi_q\,\mathrm{d}q},$$

розв'язавши яке, матимемо неявне параметричне задання $y(x)$. Приклад: $x^2 + y^2 = x^2y'^2$, явний параметричний розв'язок: $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, $y' = 1/\cos\phi$, звідки $r = c\exp(1/2/(1 - \sin\phi))/\sqrt{\cos\phi(1 - \sin\phi)}$.

Ситуація спрощується, якщо алгебраїчне рівняння розв'язується явно відносно однієї із змінних x або y (якщо відносно y', то це явне диференціальне рівняння). Нехай це буде y, тобто $y = \psi(y', x)$. Тоді параметрами (p, q) буде пара $(p = y', x)$, а параметризацію розв'язку можна записати простіше: $x = x(p)$, $y = \psi(p, x(p))$, причому невідома функція $x(p)$ може виявитися неявно заданою. Диференціальне рівняння для неї матиме вигляд $p\,\mathrm{d}x = \psi_x(p, x)\,\mathrm{d}x + \psi_p(p, x)\,\mathrm{d}p$. Зокрема, якщо рівняння лінійне відносно обох x і y (рівняння Лагранжа), то розв'язок завжди можна записати в явному параметричному вигляді $x = x(p)$, $y = y(p)$.

• *Задачі* — явні: 242, 246; $x = \varphi(y')$: 267, 268, 269, 270; $y = \psi(y')$: 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277; $y = \psi(y', x)$: 278, 279, 280, 284; $x = \phi(y', y)$: 281, 282, 283, 285, 286; Лагранжа: 287, 288, 292, 295.

2.5. Рівняння, що допускають пониження порядку

Рівняння, що містять лише старші похідні, $F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$, понижуються в порядку заміною $y^{(k)} = z$. При великих k слід мати на увазі формулу

$$y^{(k)} = f \implies y(x) = \frac{1}{(k-1)!}\int_{x_0}^{x}(x - s)^{k-1}f(s)\,\mathrm{d}s + c_0 + c_1x + \ldots + c_{k-1}x^{k-1}.$$

• *Задачі* — $k = 1$: 421, 422, 427, 432, 433, 439, 442, 444, 447, 450; $k = 2$: 430, 435, 438, 453; $k > 2$: 451, 452, 454.

Стаціонарні (автономні) рівняння, тобто такі, що не містять незалежної змінної, $F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, понижуються в порядку заміною $y' = v(y)$ (тоді $y'' = v\,\mathrm{d}v/\,\mathrm{d}y$ і т.д.).

• *Задачі* — 423, 424, 425, 426, 429, 431, 434, 437, 440, 441, 445, 446, 449; ще й не містять y: 428, 436, 443, 448.

Узагальнено-однорідні рівняння, тобто інваріантні відносно масштабного перетворення $x \to \lambda x$, $y \to \lambda^\alpha y$ ($y^{(n)} \to \lambda^{\alpha-n}y^{(n)}$), розв'язуються по різному залежно від параметра α:

1) $\alpha = \infty$ — однорідне відносно y рівняння, заміна $y' = yz$ ($y'' = y(z' + z^2)$ і т.д.).

2) $\alpha = 0$ — однорідне відносно x рівняння, заміна $y' = v(y)/x$ ($y'' = v(\,\mathrm{d}v/\,\mathrm{d}y - 1)/x^2$ і т.д.).

3) α фіксоване відмінне від 0 і ∞ — узагальнено-однорідне рівняння, заміною $y = x^\alpha z$ зводиться до попереднього випадку (комбінована заміна не спрощує викладок).

4) α довільне — рівняння, однорідне і відносно x, і відносно y, заміна $y' = yv(y)/x$ ($y'' = yv(y\,\mathrm{d}v/\,\mathrm{d}y + v-1)/x^2$ і т.д.). Взагалі кажучи, можна було б скористатись однією з вищенаведених замін, однак симетрія буде використана не повністю — як результат одержимо узагальнено-однорідне рівняння, тобто загалом треба буде зробити три заміни замість однієї. Такий потрійний шлях може бути корисним лише в тому випадку, коли комбінована однократна заміна приводить до надто складного рівняння.

- *Задачі* — $\alpha = \infty$: 464, 465, 469, 470, 472; $\alpha = 0$: 477; фіксоване α: 473, 474, 475, 476, 478, 479, 480; довільне α: 463, 466, 467, 468, 471.

Деякі рівняння вищих порядків підбором інтегруючого множника можна звести до форми похідної від рівняння нижчого порядку.

- *Задачі* — 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462.

§3. Лінійні рівняння

3.1. Лінійні скалярні рівняння: загальна теорія

Лінійне скалярне рівняння має вигляд

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \quad x \in D \tag{3.1}$$

(*зведене*, якщо $a_0(x) = 1$). Основною властивістю лінійних рівнянь є принцип суперпозиції. Для зведеного рівняння єдиність розв'язку задачі Коші забезпечується неперервністю коефіцієнтів і правої частини рівняння. Лінійно незалежна система $\{y_1, \ldots, y_n\}$ розв'язків однорідного рівняння (3.1) називається *фундаментальною системою розв'язків* (ФСР), а матриця

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

— *фундаментальною матрицею* рівняння. Знаючи ФСР, загальний розв'язок неоднорідного рівняння (3.1) можна записати у вигляді

$$y = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n + y_{\text{inhom}},$$

де y_{inhom} – частковий розв'язок неоднорідного рівняння. Останній можна знайти методом *варіювання сталих*, шукаючи його у вигляді $y_{\text{inhom}} = \sum_{i=1}^n \varphi_i y_i$, де функції φ_i знаходяться із системи

$$\mathbf{\Phi} \left\langle \varphi_1', \ldots, \varphi_n' \right\rangle^\top = \langle 0, \ldots, f/a_0 \rangle^\top.$$

Матриця $\mathbf{G}(x,\xi) = \mathbf{\Phi}(x)\mathbf{\Phi}^{-1}(\xi)$ називається *матрицею Коші* або *функцією Гріна* системи. Вона має властивості: 1) $\mathbf{G}(x,x) = \mathbf{1}$; 2) $\mathbf{G}(x,\xi)^{-1} = \mathbf{G}(\xi,x)$; 3)[1] $\mathbf{G}(x,\xi) = \mathbf{G}(x,\eta)\mathbf{G}(\eta,\xi)$. Знаючи $\mathbf{G}$, загальний розв'язок задачі Коші можна записати в такому вигляді:

$$\left\langle y, y', \ldots, y^{(n-1)} \right\rangle^\top (x) = \mathbf{G}(x,x_0) \left\langle y, y', \ldots, y^{(n-1)} \right\rangle^\top (x_0) + \int_{x_0}^x \mathbf{G}(x,\xi) \left\langle 0, \ldots, \frac{f}{a_0} \right\rangle^\top (\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Вронскіан[2] рівняння $W = \det \mathbf{\Phi}$. Його можна знайти не розв'язуючи рівняння за формулою Остроградського–Ліувіля:

$$W(x) = W(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^x \frac{a_1(\xi)}{a_0(\xi)}\,\mathrm{d}\xi \right).$$

Вронскіан має ту властивість, що система $\{y_1, \ldots, y_n\}$ розв'язків зведеного лінійного однорідного рівняння лінійно незалежна в D тоді і тільки тоді, коли $\exists x \in D\ W(x) \neq 0$ (для довільної системи функцій ця

[1] Завдяки останній властивості матрицю Коші іноді ще називають матрицею переносу (transfer matrix).

[2] Нагадаємо, що вронскіаном системи функцій $\{y_1, \ldots, y_n\}$ називається детермінант матриці 3.2 і позначається $W_{y_1,\ldots,y_n}$.

теорема справедлива лише справа наліво, і крім того, якщо система лінійно залежна, то $W = 0$). Крім того, $W_{y_1,\dots,y_n,y} = 0$ буде лінійним однорідним диференціальним рівнянням відносно y, розв'язками якого є функції $y_1, \dots, y_n$.

Зауважимо, що при заміні $\langle \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n \rangle^\top = \mathbf{T} \langle y_1, \dots, y_n \rangle^\top$, де матриця переходу $\mathbf{T}$ стала, $\tilde{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{\Phi} \mathbf{T}^\top$ і $\tilde{W} = W \det \mathbf{T}$.

Якщо відомий один з розв'язків однорідного рівняння y_1, то заміною $y = y_1 \int u \, \mathrm{d}x$ можна понизити порядок рівняння. Якщо відомий ще й другий розв'язок y_2, або ж $u_1 = (y_2/y_1)'$, то робимо аналогічну заміну $u = u_1 \int v \, \mathrm{d}x$ (причому слід вибрати оптимальний порядок замін: першу — легшу). Зокрема для рівняння другого порядку справедлива формула Абеля (3.5).

• *Задачі* — 681, 682, 683, 693; 699, 700, 702, 703.

3.2. Рівняння зі сталими коефіцієнтами

Підстановка часткового розв'язку $e^{\lambda x}$ в лінійне однорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами дає *характеристичне рівняння* $a_0 \lambda^n + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$, яке формально можна одержати замінивши $y^{(k)}$ на λ^k. Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$y_{\text{hom}}(x) = \sum_{\lambda} e^{\lambda x} (c_1 + c_2 x + \ldots + c_{m_\lambda} x^{m_\lambda - 1}),$$

де m_λ – кратність характеристичного показника λ. Щоб записати дійсний розв'язок для пари комплексно спряжених показників, кожну пару функцій $\{e^{\lambda x}, e^{\bar{\lambda} x}\}$ замінюємо на $\{e^{\Re \lambda x} \cos \Im \lambda x, e^{\Re \lambda x} \sin \Im \lambda x\}$.

• *Задачі* — на запис розв'язку за відомими показниками і навпаки; прості: 511, 512, 513, 514, 525, 529; комплексні: 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 532; кратні: 522, 523, 524, 527, 528, 531; комплексні кратні: 526, 530.

Частковий розв'язок неоднорідного рівняння можна знайти методом *невизначених коефіцієнтів* у тому випадку, коли права частина рівняння має вигляд $f(x) = e^{\alpha x} P_k(x)$ (або лінійні комбінації таких функцій), де P_k – поліном k-степеня. Шукаємо його у вигляді $y_{\text{inhom}}(x) = x^r e^{\alpha x} Q_k(x)$, де $r = 0$, якщо α не співпадає з жодним із показників рівняння, і $r = m_\lambda$ у випадку резонансу, Q_k – поліном k-степеня з невизначеними коефіцієнтами. В деяких випадках метод невизначених коефіцієнтів вимагає занадто громіздких обчислень, тоді використовуємо метод варіації сталих.

• *Задачі* — на запис розв'язку за відомими показниками; прості: 533, 534, 539, 541, 547; резонанс: 535, 536, 542, 545, 548; комплексні: 537, 540, 543, 544; комплексний резонанс: 538, 546; степені тригонометричних і гіперболічних з резонансом: 564, 574; слід розглянути задачі з неповними многочленами і лінійними комбінаціями квазімногочленів; метод варіації сталих: 575, 576, 578, 579; задача Коші: 585, 587, 588; додаткові задачі: 611–612, 624–625, 629; кусково-сталі коефіцієнти: A4.

До рівняння зі сталими коефіцієнтами зводиться рівняння Ейлера, в якому $a_i(x) = \tilde{a}_i x^{n-i}$. Частковим ров'язком є x^λ, характеристичне рівняння одержується формальною заміною $y^{(k)} \to \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-k+1)$.

• *Задачі* — прості: 589, 590; кратні: 591, 592, 593; комплексні: 594, 596; резонанс: 595, 597; інші: 598, 599, 600.

3.3. Системи лінійних рівнянь першого порядку: Загальна теорія

Будь-яку систему лінійних рівнянь можна звести до системи першого порядку, яку у векторній формі можна записати так: $\dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}$. Розв'язок відповідного матричного рівняння $\dot{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}$ називається *фундаментальною матрицею* системи. Матриця Коші означується так само і має такі ж властивості, як і для скалярних рівнянь. Розв'язок задачі Коші записується через матрицю Коші за такою формулою:

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathbf{G}(t, t_0) \boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{G}(t, \tau) \boldsymbol{f}(\tau) \, \mathrm{d}\tau.$$

Вронскіан системи $W(t) = \det \mathbf{\Phi}(t) \equiv \det \mathbf{\Phi}(0) \ \exp\left(\int_0^t \operatorname{tr} \mathbf{A}(\tau) \, \mathrm{d}\tau\right)$.

Нехай $\overline{\lim}_{t\to\infty} t^{-1} \int_0^t \|\mathbf{A}(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau < \infty$ (це виконується, наприклад, для обмежених матриць). У цьому випадку важливою характеристикою системи є її *показники Ляпунова*: $\lambda[\boldsymbol{x}(t)] = \overline{\lim}_{t\to\infty} t^{-1} \ln \|\boldsymbol{x}(t)\|$, яких з урахуванням кратності є рівно $\dim \mathbf{A}$. Сукупність всіх показників Ляпунова складає *спектр* системи.

Якщо $\sum_\lambda \lambda = \lim_{t\to\infty} t^{-1}\int_0^t \operatorname{tr}\mathbf{A}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$, то система називається правильною (до цього класу, зокрема, належать постійні і трикутні матриці).

Для системи з періодичними коефіцієнтами, $\mathbf{A}(t+T) = \mathbf{A}(t)$, виконується теорема Флоке: $\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{F}(t)e^{\mathbf{K}t}$, де $\mathbf{F}$ – періодична, а $\mathbf{K}$ – стала матриці. Матриця Коші на періоді називається *матрицею монодромії*: $\mathbf{G}(t+T,t) = \mathbf{F}(t)e^{\mathbf{K}T}\mathbf{F}^{-1}(t)$, а її власні числа — мультиплікаторами. Якщо λ – власні числа матриці K (характеристичні показники), то мультиплікатори дорівнюють $e^{\lambda T}$, а показники Ляпунова $\Re\lambda$.

3.4. Системи лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Для системи зі сталими коефіцієнтами $\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}\Phi(0)$, $\mathbf{G}(t,\tau) = \mathbf{\Phi}(t-\tau)\mathbf{\Phi}^{-1}(0)$, а показники Ляпунова дорівнюють дійсним частинам власних значень матриці $\mathbf{A}$. Нехай $\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ – жорданова нормальна форма матриці $\mathbf{A}$, де $\mathbf{T}$ – матриця переходу, тоді $\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{T}e^{\mathbf{J}t}$. Повний розв'язок дається формулою:

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathbf{T}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{T}^{-1}\boldsymbol{x}(0) + \mathbf{T}\int_0^t e^{\mathbf{J}(t-\tau)}\mathbf{T}^{-1}\boldsymbol{f}(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Метод невизначених коефіцієнтів виглядає так: якщо $\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{k}}(t)e^{\alpha t}$, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді $\boldsymbol{Q}_{\max(\boldsymbol{k})+r}(t)e^{\alpha t}$, де r – порядок найбільшої жорданової клітини з власним значенням α.

- *Задачі* — функції матриць: 867, 868, 869, 874; $1+1$: 786, 787, 788; $1+1+1$: 796, 797, 798, 799, 800, 804, 805, 806, 807; 2^c: 789, 790, 791; $1+2^c$: 801, 802, 803; 2: 792, 793, 794, 795; $1+2$: 808, 809, 810, 811; 3: 812; кратні комплексні ???; неоднорідні: 830, 834; 846, 847, 848, 849; додаткові: 880.

Задачу Коші для лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами зручно розв'язувати методом перетворення Лапласа.

- *Задачі* — A5, A6, A7, 582, 583, 584, 585, 588; системи: A8, 826.

3.5. Лінійні рівняння другого порядку

Загальне лінійне рівняння другого порядку

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \tag{3.3}$$

заміною

$$y(x) = u(x)\exp\left\{-\int \frac{a_1\,\mathrm{d}x}{2a_0}\right\},$$

зводиться до *нормальної форми*

$$u'' + h(x)u = g(x), \tag{3.4}$$

де

$$h = \frac{a_2}{a_0} - \left(\frac{a_1}{2a_0}\right)^2 - \left(\frac{a_1}{2a_0}\right)', \qquad g = \frac{f}{a_0}\exp\left\{\int \frac{a_1\,\mathrm{d}x}{2a_0}\right\}.$$

Якщо $\{y_1, y_2\}$ – ФСР рівняння (3.3), то його загальний розв'язок має вигляд

$$y = y_2\int \frac{y_1 f\,\mathrm{d}x}{a_0 W_{y_1y_2}} - y_1\int \frac{y_2 f\,\mathrm{d}x}{a_0 W_{y_1y_2}}.$$

Якщо відомий частковий розв'язок однорідного рівняння, то другий лінійно незалежний до нього знаходиться за формулою Абеля:

$$y_2 = y_1\int W y_1^{-2}\,\mathrm{d}x, \tag{3.5}$$

де W обчислюється за формулою (3.1). Зокрема, якщо $y_1(x_0) \neq 1$, то

$$\tilde{y}_2(x) = y_1(x)\frac{y_1(x_0)}{W(x_0)}\int_{x_0}^x \frac{W(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{y_1^2(\xi)}$$

буде розв'язком з $y_2(x_0) = 0$ і $y_2'(x_0) = 1$, а

$$\tilde{y}_1(x) = \frac{y_1(x) - y_1'(x_0)y_2(x)}{y_1(0)}$$

– розв'язком з $\tilde{y}_1(x_0) = 1$ і $\tilde{y}_1'(x_0) = 0$. При цьому $W_{\tilde{y}_1,\tilde{y}_2}(x) = W(x)/W(x_0)$ і розв'язок задачі Коші матиме вигляд:

$$y(x) = y(x_0)\tilde{y}_1(x) + y'(x_0)\tilde{y}_2(x) + W(x_0)\int_{x_0}^{x} \frac{\tilde{y}_2(x)\tilde{y}_1(\xi) - \tilde{y}_1(x)\tilde{y}_2(\xi)}{a_0(\xi)W(\xi)} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Для рівняння з T-періодичними коефіцієнтами в нормальній формі характеристичні показники дорівнюють $\pm\lambda$, де $2\,\mathrm{ch}\,\lambda T = \mathrm{tr}\,\mathbf{G}(T,0) = u_1(T) + u_2'(T)$, а $\{u_1, u_2\}$ така ФСР, що $u_1(0) = 1,\ u_1'(0) = 0,\ u_2(0) = 0,\ u_2'(0) = 1$. Якщо ж $h(x)$ парна функція, то u_1 і u_2 будуть відповідно парною і непарною функціями, тоді $\cosh\lambda T = u_1(T)$, а матриця монодромії матиме вигляд

$$\mathbf{G}(T,0) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \frac{\alpha^2-1}{\beta} & \alpha \end{pmatrix},\ \text{де } \alpha = u_1(T),\ \beta = u_1'(T).$$

3.6. Побудова функцій впливу

Для рівняння (3.3) на відрізку $x_1 < x < x_2$ з двома додатковими лінійними невиродженими умовами $\mathsf{L}_1 y = b_1$ і $\mathsf{L}_2 y = b_2$ розв'язок можна записати наступним чином

$$y(x) \equiv y_{f=0}(x) + y_{b=0}(x) = y_{f=0}(x) + \int_{x_1}^{x_2} G(x,\xi) f(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

де $G(x,\xi)$ – так звана *функція впливу* (правої частини рівняння). Вона задовольняє рівняння з $f(x) = \delta(x-\xi)$ і однорідними межовими умовами, тому її можна шукати у вигляді $G(x,\xi) = y_1(x)\varphi_1(x,\xi) + y_2(x)\varphi_2(x,\xi)$, де $\{y_1, y_2\}$ – ФСР, а $\varphi_i(x,\xi)$ – кусково-сталі функції x, а саме:

$$\varphi_i(x,\xi) = \begin{cases} \varphi_i^-(\xi), & \xi < x, \\ \varphi_i^+(\xi), & \xi > x. \end{cases}$$

Останні задовольняють такі чотири умови:

$$\varphi_1^+ - \varphi_1^- = \frac{y_2}{a_0 W_{y_1 y_2}}, \quad \varphi_2^+ - \varphi_2^- = -\frac{y_1}{a_0 W_{y_1 y_2}}, \qquad \mathsf{L}_{1,2} G(x,\cdot) = 0$$

($\mathsf{L}_{1,2}$ діють на x).

Зокрема, для задачі з обома локальними умовами в одній точці x_1 (наприклад, задача Коші) $\varphi_{1,2}^+ = 0$, звідки маємо

$$y_{b=0}(x) = \int_{x_1}^{x} \frac{y_2(x)y_1(\xi) - y_1(x)y_2(\xi)}{a_0(\xi)W_{y_1 y_2}(\xi)} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Для задачі з одною локальною межовою умовою $\mathsf{L}_1 y = b_1$ в точці x_1 і другою $\mathsf{L}_2 y = b_2$ в точці x_2 (*крайова задача*) маємо

$$G(x,\xi) = \frac{1}{a_0(\xi)W_{y_1 y_2}(\xi)} \begin{cases} y_2(x)y_1(\xi), & \xi < x, \\ y_1(x)y_2(\xi), & \xi > x, \end{cases}$$

$$y_{b=0}(x) = y_2(x)\int_{x_1}^{x} \frac{y_1(\xi)f(\xi)}{a_0(\xi)W_{y_1 y_2}(\xi)}\,\mathrm{d}\xi + y_1(x)\int_{x}^{x_2} \frac{y_2(\xi)f(\xi)}{a_0(\xi)W_{y_1 y_2}(\xi)}\,\mathrm{d}\xi,$$

причому y_1 задовольняє однорідну межову умову в точці x_1: $\mathsf{L}_1 y_1 = 0$, а y_2 – в точці x_2: $\mathsf{L}_2 y_2 = 0$.

Розв'язок $y_{f=0}$ має, очевидно, вигляд $c_1 y_1 + c_2 y_2$, де невідомі константи визначаються із системи $\sum_{j=1,2} c_j \mathsf{L}_i y_j = b_i$, $i = 1, 2$. Зокрема, якщо $\mathsf{L}_i y_i = 0$, то

$$y(x) = \frac{b_2}{\mathsf{L}_2 y_1} y_1(x) + \frac{b_1}{\mathsf{L}_1 y_2} y_2(x).$$

• *Задачі* — 765, 767, 774, 778, 781, причому задавати неоднорідні межові умови в задачнику Філіпова.

3.7. Задача Штурма–Ліувіля

Задачею ШЛ ми називатимемо спектральну задачу виду

$$\mathsf{L}X \equiv -(pX')' + qX = \lambda\rho X \tag{3.6}$$

на скінченному чи нескінченному відрізку $[x_1, x_2]$ з лінійними однорідними межовими умовами, розв'язки якої задовольняють наступні властивості:

- власні числа дійсні і утворюють зліченну зростаючу послідовність $\lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \dots$ з точкою згущення лише на нескінченності;
- в прийнятій нумерації власна функція X_n має рівно n нулів на інтервалі $]x_1, x_2[$;
- відповідаючі різним значенням індексу власні функції X_n ортогональні з вагою ρ:

$$(X_n, X_m) \equiv \int_{x_1}^{x_2} \overline{X_n(x)} X_m(x) \rho(x)\,\mathrm{d}x = \|X_n\|^2 \delta_{nm}, \tag{3.7}$$

$$\|X\|^2 \equiv (X, X) = \int_{x_1}^{x_2} |X(x)|^2 \rho(x)\,\mathrm{d}x; \tag{3.8}$$

- система власних функцій $\{X_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ повна, тобто будь-яку функцію $f \in \mathrm{L}_2^\rho[x_1, x_2]$ можна подати у вигляді збіжного в середньому квадратичному[3] ряду Фур'є:

$$f(x) = \sum_n f_n X_n(x), \tag{3.9}$$

  де коефіцієнти Фур'є

$$f_n = \frac{1}{\|X\|^2} \int_{x_1}^{x_2} \overline{X_n(x)} f(x) \rho(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.10}$$

При цьому вважається, що $p \in \mathrm{C}^1\,]x_1, x_2[$, $q, \rho \in \mathrm{C}\,]x_1, x_2[$, $p(x) > 0$ і $\rho(x) > 0$ при $x \in\,]x_1, x_2[$. Зауважимо, що неперервність можна скрізь замінити кусковою неперервністю, а межові умови у випадку необмеженої області іноді замінюють умовами інтегровності (наприклад L_2 в стаціонарному рівнянні Шредінгера).

Заміною[4]

$$\xi = \int \sqrt{\frac{\rho}{p}}\,\mathrm{d}x, \quad X = gy, \text{ де } g = \frac{1}{\sqrt[4]{p\rho}}, \tag{3.11}$$

рівняння (3.6) перетворюється до *приведеної форми* (так званої нормальної форми Ліувіля):

$$-\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\xi^2} + Uy = \lambda y, \tag{3.12}$$

де

$$U = \frac{q}{\rho} - \frac{(pg')'}{\rho g} \equiv \frac{q}{\rho} + g\frac{\mathrm{d}^2 g^{-1}}{\mathrm{d}\xi^2}. \tag{3.13}$$

Наведене означення загальне, але неконструктивне, тому дамо кілька варіантів конструктивного задання задачі ШЛ.

1. В *регулярній задачі ШЛ* відрізок $[x_1, x_2]$ скінченний, межові умови мають вигляд

$$\alpha_1 X(x_1) - \beta_1 X'(x_1) = 0, \quad \alpha_2 X(x_2) + \beta_2 X'(x_2) = 0, \tag{3.14}$$

де α_i і β_i – дійсні числові коефіцієнти, хоча б один з яких відмінний від нуля, а на функції p, q, ρ накладаються жорсткіші умови: $p \in \mathrm{C}^1[x_1, x_2]$, $\rho \in \mathrm{C}[x_1, x_2]$, $\rho \in \mathrm{L}_1^\rho[x_1, x_2]$, $p(x) > 0$ і $\rho(x) > 0$ при $x \in [x_1, x_2]$.

[3]Якщо функція f кусково неперервно диференційовна, то ряд збігається поточково, більш того рівномірно неперервно на кожному інтервалі неперервності функції f.

[4]Необхідна для заміни умова двічі диференційовності функцій p і ρ неістотня, оскільки з точки зору аналізу спектра задачі ШЛ їх можна апроксимувати двічі диференційовними функціями.

У фізичних застосуваннях числові коефіцієнти α_i і β_i майже завжди одного знаку[5], при цьому справджується оцінка

$$\lambda_0 \geqslant \min_x \left(\frac{q(x)}{\rho(x)} \right) \tag{3.15}$$

(див. [6, задача 2.13], де ці умови порушуються).

2. В *задачі ШЛ з умовами квазіперіодичності* межові умови (3.14) змінюються на такі:

$$X(x_1) = e^{ik} X(x_2), \quad X'(x_1) = e^{ik} X'(x_2) \tag{3.16}$$

з дійсним параметром k (при $k = 0$ одержимо умови періодичності).

3. В *сингулярній задачі ШЛ* порушується якась із умов регулярної задачі на функції p, q або ρ в крайніх точках відрізка $[x_1, x_2]$, але так що[6]

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{\rho(x)}{p(x)}}\, \mathrm{d}x < \infty, \tag{3.17}$$

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \sqrt{\left(-U - \frac{1}{4(\xi - \xi_1)^2} - \frac{1}{4(\xi_2 - \xi)^2} \right)_+} \mathrm{d}\xi < \infty \tag{3.18}$$

в позначеннях приведеного рівняння (3.12). При цьому, якщо $p(x_i) \neq 0$, то межова умова в точці x_i змінюється[7] на

$$X(x_i) = 0, \tag{3.19}$$

якщо ж $p(x_i) = 0$ – на

$$|X(x_i)| < \infty \tag{3.20}$$

4. У *задачі ШЛ в необмеженій області* інтервал (ξ_1, ξ_2) після приведення рівняння до форми (3.12) нескінченний хоча б з одного боку. При цьому в нескінченній межовій точці вимагається[8], щоб $U(\xi) \to +\infty$, а межова умова змінюється на (3.20).

Додамо, що в задачах ШЛ типу 1, 3 і 4 спектр невироджений, а в задачі з умовами періодичності може бути двократно виродженим (тільки не λ_0). В задачах ШЛ типу 1, 2 і 3 власні числа λ_n зростають як n^2, а в задачі в необмеженій області повільніше.

• *Задачі* — A10, A11, A12, A13, A14, див. також задачі з другого параграфу [6].

§4. Теорія стійкості

4.1. Загальна теорія

Система $\dot{\boldsymbol{x}}_\xi = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_\xi, t)$, $\boldsymbol{x}_\xi(0) = \boldsymbol{\xi}$ *стійка* за початковими умовами в точці $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_0$ (стійка по Ляпунову), якщо її розв'язки рівномірно по t неперервні за початковими умовами, тобто

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0\| < \delta \implies \forall t \geqslant 0\ \|\boldsymbol{x}_\xi(t) - \boldsymbol{x}_{\xi_0}(t)\| < \varepsilon.$$

Якщо ж $\|\boldsymbol{x}_\xi(t) - \boldsymbol{x}_{\xi_0}(t)\| \to 0$, при $t \to \infty$, то система *асимптотично стійка*. Зауважимо, що дослідження на стійкість розв'язку $\boldsymbol{x}_{\xi_0}$ заміною $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{x}_{\xi_0}$ завжди зводиться до з'ясування стійкості нульового розв'язку.

• *Задачі* — 881, 890, 891, 892; додаткові: 893.

[5] Це пов'язано з тим, що за цієї умови, а також за умови $q \geqslant 0$, диференціальний оператор ШЛ додатно визначений
[6] Порушення першої умови приводить до задачі в необмеженій області, другої — до колапсу (спектр необмежений знизу).
[7] Розв'язки з межовою умовою (3.14) можуть не існувати.
[8] Інакше спектр може містити неперервну складову, див. [6, задача 2.22].

4.2. Дослідження стійкості за лінійним наближенням

В більшості випадків для з'ясування стійкості системи достатньо дослідити на асимптотичну стійкість лінеаризовану систему. Для цього є теорема Ляпунова: нехай в околі нульового розв'язку $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t) = \mathbf{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},t)$, причому $\|\partial\boldsymbol{g}/\partial\boldsymbol{x}\| = O\left(\|\boldsymbol{x}\|^{\varepsilon>0}\right)$, а лінеаризована система $\dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}(t)\boldsymbol{x}$ з показниками Ляпунова λ правильна, тоді
$$\forall\delta > 0\ \|\boldsymbol{x}(t)\| \leqslant C_\delta e^{(\lambda_{\max}+\delta)t}\|\boldsymbol{x}(0)\|.$$
Таким чином, якщо $\lambda_{\max} < 0$, то нульовий розв'язок асимптотично стійкий. Якщо $\lambda_{\max} > 0$, то нульовий розв'язок нестійкий, однак якщо k показників Ляпунова від'ємні, то в околі нуля існує k-вимірний підмноговид, в якому розв'язки асимптотично стійкі. Якщо ж $\lambda_{\max} = 0$, то за лінійним наближенням неможливо визначити стійкість системи. Виняток становить випадок лінійної системи зі сталою матрицею, тоді для стійкості необхідно і достатньо, щоб всі власні числа матриці з нульовими дійсними частинами були недефектними.

• *Задачі* — $\dot{x} = -x + f(t)x^2$; 901, 902, 903, 904, 905, 906; 915, 916, 917, 918, 920, 921, 922; додаткові: 960.

Слід зауважити, що у випадку лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, розв'язувати характеристичне рівняння необов'язково, якщо нас цікавлять лише знаки дійсних частин показників. Зокрема, у випадку скалярного рівняння потрібно скласти з коефіцієнтів цього рівняння (3.1) матрицю Гурвіца (коефіцієнт a_0 вибираємо додатним)

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & \boldsymbol{a}_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & \boldsymbol{a}_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & \boldsymbol{a}_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

і скористатися критерієм Льєнара–Шипара: для стійкості системи необхідно і достатньо, щоб всі a_i, $i = \overline{1,n}$, і головні мінори, побудовані на діагоналях $\{a_1,\dots,a_i\}$, $i = n-1, n-3, n-5, \dots$, були додатними.

• *Задачі* — 933, 934, 949, 950.

4.3. Дослідження стійкості за функцією Ляпунова

У випадку, коли лінійне наближення не дає відповіді на питання стійкості, використовуються наступні дві теореми. Теорема Ляпунова: якщо в околі нуля існує функція Ляпунова V така, що

$$V(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad V(\boldsymbol{x}) > 0,\ \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}, \qquad \frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}(t))}{\mathrm{d}t} \leqslant 0,$$

то нульовий розв'язок стійкий, якщо ж до того $\dot{V}(\boldsymbol{x},t) \leqslant -w(\boldsymbol{x}) < 0$ з неперервною w, то асимптотично стійкий. Теорема Четаєва: якщо на деякому підмноговиді $D \ni \mathbf{0}$ існує функція Ляпунова V така, що

$$V(\boldsymbol{x}) = 0,\ \boldsymbol{x} \in \partial D, \qquad V(\boldsymbol{x}) > 0,\ \boldsymbol{x} \in D, \qquad \frac{\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}(t))}{\mathrm{d}t} \geqslant w(\boldsymbol{x}) > 0,$$

з неперервною w, то нульовий розв'язок нестійкий (і розбігається саме в D).

• *Задачі* — 923, 924, 925, 926, 927, 928, 929, 930; додатково: 924*, 931*.

§5. Системи нелінійних рівнянь

5.1. Методи інтегрування

Є два універсальні методи інтегрування систем нелінійних рівнянь: метод пониження порядку і метод інтегровних комбінацій. Перший був розібраний вище. Другий...

• *Задачі* — 1141–1160.

5.2. Автономні системи нелінійних рівнянь першого порядку: Загальна теорія

Будь-яку систему явних диференціальних рівнянь можна звести до автономної системи першого порядку: $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ (фазовий простір). Неперетинність траєкторій. Фазовий об'єм Ω змінюється з часом за рівнянням $\dot{\Omega} = \Omega\nabla\boldsymbol{f}$. Якщо $\nabla\boldsymbol{f} = 0$, то система консервативна, якщо $\nabla\boldsymbol{f} < 0$ — дисипативна.

Інваріантні множини, граничні множини (мінімальні інваріантні множини) і атрактори (асимптотично стійкі граничні множини). Фазовий простір розбивається на підмноговид, з якого розв'язок йде на нескінченність, інваріантні підмноговиди притягання атракторів, а також стійкі, але не асимптотично, граничні множини. Межами розбиття (якщо такі є), так званими сепаратрисами, служать граничні множини, які не є атракторами. Типи граничних множин: точки рівноваги або стаціонарні точки (нульвимірні підмноговиди), граничні цикли (одновимірні підмноговиди), інваріантні тори (підмноговиди розмірності два і більше), дивні атрактори (множини притягання, які не є підмноговидами). Скінченним граничним циклам і тільки їм відповідає періодичний рух, m-вимірним інваріантним торам відповідає квазіперіодичний рух з m неспіврозмірними періодами. В ситуації загального положення квазіперіодичний рух завжди нестійкий (зокрема, за рахунок явища синхронізації коливань) і траєкторії прямують до граничних циклів (умовно кажучи, траєкторії на будь-якому підмноговиді завжди можна неперервно деформувати до циклу). Дивні атрактори виникають у просторі розмірності три і вище. Тип граничної множини визначається показниками Ляпунова. Зокрема, для атракторів маємо: якщо всі показники від'ємні, то це фокус або вузол; якщо один нульовий, а всі інші від'ємні, то це граничний цикл; якщо m нульових, а всі інші від'ємні, то це m-вимірний інваріантний тор; якщо ж серед показників є нульові, від'ємні і додатні, і гранична множина є атрактором, то це дивний атрактор.

Детальніша класифікація точок рівноваги проводиться за характеристичними показниками лінійного наближення. У двовимірному випадку маємо: якщо показники комплексно спряжені з ненульовою дійсною частиною, то це стійкий (асимптотично) або нестійкий фокус (963) (у випадку чисто уявних показників і простої, не асимптотичної, стійкості матимемо так званий центр (966)), якщо показники дійсні і одного знаку, то це стійкий (асимптотично) або нестійкий вузол (962) (вироджений, якщо показники співпадають (967)), якщо ж показники дійсні і різних знаків, то це сідло з сепаратрисою (961). У багатовимірному випадку точки рівноваги класифікуються комбінаціями вищенаведених типів. Детальніша класифікація граничних циклів (1040) проводиться за мультиплікаторами.

Задачі: 1021, 1022.

Система Лоренца,

$$\dot{x} = \sigma(y - x),\ \dot{y} = rx - y - xz,\ \dot{z} = xy - bz,$$

дисипативна, оскільки $\nabla f = -(\sigma + b + 1) < 0$. Вона симетрична відносно осі z. Можна показати, що всі траєкторії обмежені. При $r < 1$ в системі лише одну точку рівноваги – стійкий вузол $O_0 = (0, 0, 0)$. При $1 < r < r_1$ система має два стійкі вузли $O_{1,2} = \left(\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1\right)$. При $r_1 < r < \sigma\frac{\sigma+b+3}{\sigma-b-1}$ крім стійких вузлів $O_{1,2}$ з'являється дивний атрактор, який ділить фазовий простір з вузлами $O_{1,2}$ через граничні сідлові цикли навколо $O_{1,2}$. При $\sigma\frac{\sigma+b+3}{\sigma-b-1} < r < r_2$ в системі залишається лише дивний атрактор. І нарешті, при $r > r_2$ дивний атрактор змінюється стійким граничним циклом.

§6. Якісний аналіз і програмні засоби

Поведінка розв'язків загального явного рівняння першого порядку (`DEplot`) $y' = f(x, y)$. Поле напрямів (`dfieldplot`). Врахування симетрії, зведення до інтегрального рівняння, метод послідовних наближень. Деякі оцінки (за умов існування і єдиності):

1) якщо $f_1(x, y) \leqslant f_2(x, y)$ і $y_1(x_0) \leqslant y_2(x_0)$, то $y_1(x) \leqslant y_2(x)$;
2) якщо $\phi_1(x_0) \leqslant y(x_0) \leqslant \phi_2(x_0)$ і $\phi_1'(x) \leqslant f(x, \phi_1)$, $\phi_2'(x) \geqslant f(x, \phi_2)$, то $\phi_1(x) \leqslant y(x) \leqslant \phi_2(x)$;
3) якщо $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < M|y_1 - y_2|$ і $|f(x, y) - f_2(x, y)| < \delta$, то $|y(x) - y_2(x)| \leqslant \frac{\delta}{M}\left(e^{M|x-x_0|} - 1\right)$.

• *Задачі* — 1136, 1137, 1138, 1139, 1140.

Поле напрямів. Метод послідовних наближень та інтегральна форма.

Програмні засоби пакету Maple 9:

- `with(DEtools):`
- `DE:=diff(y(x),x)=x-y(x)^2;`

- `IC:=y(0)=1;`
- `dsolve(DE);`
- `dsolve({DE,IC},y(x));`
- `dsolve({DE,IC},y(x),'numeric');`
- `dsolve(DE,y(x),'series');`
- `dfieldplot(DE,y(x),x=x1..x2,y=y1..y2,color=rhs(DE));`
- `PDEtools[dchange](y(x)=sqrt(x)-u(x),DE,[u]);`
- `odetest(y(x)=AiryBi(1,x)/AiryBi(x),DE).`

§7. Розвинення в ряди. Асимптотичні розвинення

7.1. Розвинення в ряди

Метод степеневих рядів (1091-1097, 1098). Розвинення розв'язків лінійних рівнянь другого порядку в степеневі ряди: регулярні (1100-1109) та сингулярні (прості: 1110, 1111, 1112, 1113, 1114, 1115; складніші: 1118, 1119; логарифмічні: 1116-7 (I_0, K_0); нерозкладні: 1120). Розвинення в ряди Фур'є (1121, 1122, 1123, 1124, 1125).

7.2. Асимптотичні розвинення

Рівняння першого порядку (1138, 1139).

Лінійні рівняння другого порядку (738-750, 1116-7 (I_0, K_0)). Задачі Штурма–Ліувілля (квантовий осцилятор).

Перетворення Ліувілля (737):

$$y'' + b(x)y' \pm g^2(x)y = 0,\ t = \int g(x)\,\mathrm{d}x \implies \ddot{y} + \left(\frac{b}{g} - \left(\frac{1}{g}\right)'\right)\dot{y} \pm y = 0;$$
$$y'' + b(x)y' \pm y = 0,\ y = u\exp\left(-\frac{1}{2}\int b(x)\,\mathrm{d}x\right) \implies u'' + \left(\pm 1 - \frac{b'}{2} - \frac{b^2}{4}\right)u = 0,$$

дозволяють знайти асимптотику розв'язків диференціальних рівнянь. Далі, або розкладаємо в асимптотичний ряд, або ітеруємо за малими членами за нижче наведеною схемою.

Нехай

$$y'' - (\lambda + h(x))^2 y = g(x)y,$$

причому

$$\int_x^\infty g(s)\,\mathrm{d}s \to 0,\ h(x) \to 0,\ x \to +\infty.$$

Шукаємо розв'язок у вигляді

$$\begin{aligned} y(x) &= u(x)\exp\left\{\lambda x + \int_0^x h(s)\,\mathrm{d}s\right\} \\ &\Rightarrow\ 2\lambda u' = (g - h')u - 2hu' - u'' \to 0,\ x \to +\infty. \end{aligned}$$

Поклавши без обмеження загальності $u(+\infty) = 1$, останнє рівняння перепишемо у вигляді

$$u(x) = 1 - \frac{1}{2\lambda}\left[u'(x) + 2h(x)u(x) + \int_x^\infty (g(s) + h'(s))u(s)\,\mathrm{d}s\right].$$

Ітеруючи останнє рівняння стартуючи з 1, одержимо асимптотичні наближення. Зокрема, перші дві поправки мають вигляд:

$$\begin{aligned} u &\equiv 1 + u_{(1)} + u_{(2)} + \ldots,\ u_{(1)}(x) = -\frac{1}{2\lambda}\left[h(x) + \int_x^\infty g(s)\,\mathrm{d}s\right], \\ u_{(2)}(x) &= \frac{1}{4\lambda^2}\left[h'(x) - g(x) + \frac{3}{2}h^2(x) + h(x)\int_x^\infty g(s)\,\mathrm{d}s + 2\int_x^\infty h(s)g(s)\,\mathrm{d}s + \int_x^\infty\int_s^\infty g(s)g(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}s\right]. \end{aligned}$$

Часто буває корисним перехід до полярних координат:

$$\begin{aligned} & y'' + h(x)y = 0, \\ & \rho\sin\phi = y\sqrt{h},\ \rho\cos\phi = y', \\ & \phi' = \sqrt{h} + \frac{h'}{4h}\sin 2\phi,\ \rho = \exp\left\{\int \frac{h'}{2h}\sin^2\phi\,\mathrm{d}x\right\}. \end{aligned}$$

§8. Метод малого параметру

Похідні по параметру (1064-1073). Регулярні методи малого параметра (1074-1078). Вимушені коливання (1079-1085). Випадок резонансу і нелінійні коливання, метод Крилова–Боголюбова (1086-1090).

§9. Інтегральні рівняння

Рівняння *Фредгольма* другого роду

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x,\xi)y(\xi)\,\mathrm{d}\xi,\ ,$$

з виродженим ядром

$$K(x,\xi) = \sum_{i=1}^m u_i(x)v_i(\xi) \tag{9.1}$$

розв'язується введенням сталих $\phi_i = \int_a^b v_i(\xi)y(\xi)\,\mathrm{d}\xi$, які знаходяться з лінійної системи, утвореної підстановкою $y(x) = f(x) + \sum_{i=1}^m u_i(x)\phi_i$ в інтеграли для ϕ_i.

• *Задачі* — Г1018, Г1019, Г1021*, Г1022, Г1027.

Рівняння *Вольтера* першого ($\alpha = 0$) або другого ($\alpha = 1$) роду

$$\alpha y(x) = f(x) + \int_a^x K(x,\xi)y(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

з виродженим ядром (9.1) розв'язується введенням функцій $\varphi_i(x) = \int_a^x v_i(\xi)y(\xi)\,\mathrm{d}\xi$, які знаходяться з лінійної системи диференціальних рівнянь $\dot\varphi_i(x) = v_i(x)y(x)$, $i = \overline{1,m}$, доповнених початковими умовами $\varphi_i(a) = 0$ і лінійним алгебраїчним рівнянням $\alpha y(x) = f(x) + \sum_{i=1}^m u_i(x)\varphi_i(x)$.

• *Задачі* — А22, Г1110, Г1111, Г1112, Г1113.

Деякі рівняння Фредгольма першого роду, а також рівняння зі складними межами інтегрування диференціюванням і заміною незалежної змінної зводяться до розглянутих вище рівнянь Вольтера.

• *Задачі* — Фредгольма: Г1072, Г1076; складні межі: Г1132, Г1133.

Рівняння *типу згортки* розв'язуються методами відповідних інтегральних перетворень.

• *Задачі* — Лапласа: А23, Г1145, Г1146, Г1161, Г1174; Фур'є: ???.

§10. Додаткові розділи

10.1. Функціональні рівняння

Деякі функціональні рівняння в класі диференційовних функцій можна розв'язати беручи частинні похідні від них і складаючи з них диференціальні рівняння.

• *Задачі* — А24, А25, А26, А27, А28, А29.

10.2. Квазілінійні рівняння в частинних похідних першого порядку

Квазілінійне рівняння в частинних похідних першого порядку

$$a_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+\ldots+a_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=b \tag{10.1}$$

із залежними від $\boldsymbol{x}$ і u коефіцієнтами розв'язується методом характеристик за наступним алгоритмом. Складаємо рівняння характеристик:

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{a_1}=\ldots=\frac{\mathrm{d}x_n}{a_n}=\frac{\mathrm{d}u}{b}.$$

Знайшовши n перших інтегралів $\varphi_1(\boldsymbol{x},u),\ldots,\varphi_n(\boldsymbol{x},u)$, одержуємо загальний розв'язок у неявному вигляді $F(\varphi_1(\boldsymbol{x},u),\ldots,\varphi_n(\boldsymbol{x},u))=0$, де F – довільна диференційовна функція n аргументів. Якщо u входить лише в один з інтегралів, скажімо останній, то розв'язок можна записати у вигляді $\varphi_n(\boldsymbol{x},u)=\tilde{F}(\varphi_1(\boldsymbol{x}),\ldots,\varphi_{n-1}(\boldsymbol{x}))$. У деяких випадках останнє рівняння можна явно розв'язати відносно u.

Додаткові умови являють собою задання u на гіперповерхні, що не містить характеристик: $u(\boldsymbol{x})=u_0(\boldsymbol{x})$, при $h(\boldsymbol{x})=0$ (рівняння гіперповерхні). Для відшукання функції F розв'язуємо систему алгебраїчних рівнянь $\left\{\varphi_i(\boldsymbol{x},u_0(\boldsymbol{x}))=\phi_i,\ i=\overline{1,n}\right\}$ відносно $\boldsymbol{x}$. Позначимо її розв'язок через $\boldsymbol{\xi}[\phi_1,\ldots,\phi_n]$, тоді розв'язок рівняння (10.1) запишеться у вигляді $h(\boldsymbol{\xi}[\varphi_1(\boldsymbol{x},u),\ldots,\varphi_n(\boldsymbol{x},u)])=0$.

- *Задачі* — 1167, 1168, 1171, 1172, 1184, 1185, 1186, 1187; з дод. умовами: 1189, 1190, 1192, 1193, 1201, 1202, 1204 (на характеристиці).

Задачі

1. (183) Знайти періодичний розв'язок рівняння $y' = 2y\cos^2 x - \sin x$.
2. (184) Довести, що розв'язок рівняння $y' + p(x)y = q(x)$ за умови, що $p(x) \geqslant a > 0$ і $q(x) \to 0$ при $x \to \infty$, прямує до нуля при $x \to \infty$.
3. Дослідити явище резонансу в електричному колі.
4. $y'' + y\,\mathrm{sgn}\,x = 0, \quad y(-1) = 0,\ y'(-1) = 1.$

Використовуючи перетворення Лапласа, розв'язати задачу Коші:

5. $\ddot{x} + \dot{x} - 2x = e^{-t}, \quad x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 1.$
6. $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = e^{t}, \quad x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 0.$
7. $\ddot{x} + x = t\cos 2t, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$
8. $\left\|\begin{array}{ll} 4\dot{x} - \dot{y} + 3x = \sin t, & x(0) = 1, \\ \dot{x} + y = \cos t, & y(0) = 2. \end{array}\right.$
9. (960) Розв'язати систему $\dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}\boldsymbol{x}$, де $\mathbf{A}$ – періодична з періодом 2 матриця така, що

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ 0 < t < 1, \qquad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix},\ 1 < t < 2.$$

Знайти матрицю монодромії і характеристичні показники. Дослідити на стійкість.

10. Розв'язати регулярну задачу ШЛ

$$\left\|\begin{array}{l} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{array}\right.$$

11. Розв'язати регулярну задачу ШЛ

$$\left\|\begin{array}{l} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ X'(0) - hX(0) = 0, \quad X'(l) + hX(l) = 0, \end{array}\right.$$

де h – додатній числовий параметр.

12. Розв'язати задачу ШЛ з умовами періодичності

$$\left\|\begin{array}{l} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ X(0) = X(2\pi), \quad X'(0) = X'(2\pi). \end{array}\right.$$

13. Розв'язати сингулярну задачу ШЛ на відрізку $[-1, 1]$

$$\left\|\begin{array}{l} -(1 - x^2)X'' + 2xX' = \lambda X, \\ |X(\pm 1)| < +\infty. \end{array}\right.$$

14. Розв'язати сингулярну задачу ШЛ на відрізку $[-1, 1]$

$$\left\|\begin{array}{l} -(1 - x^2)X'' + 2xX' + \frac{\mu^2}{1-x^2}X = \nu(\nu + 1)X, \\ X(x) = o\left((1 \mp x)^{-\mu/2}\right),\ \text{при } x \to \pm 1, \end{array}\right.$$

де μ – дійсний числовий параметр.

15. Записати функцію Ляпунова для системи $\dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}\boldsymbol{x}$, де $\mathbf{A}$ – стала матриця.
16. Дослідити нульовий розв'язок на стійкість:
$\left\|\begin{array}{l} \dot{x} = y - x - xy, \\ \dot{y} = x - y + x^2 + y^2. \end{array}\right.$

Нехай функції $f_{1,2}$, $g_{1,2}$ мають знак свого аргументу (тобто $\mathrm{sgn}\, f_1(x) = \mathrm{sgn}\, x$). Дослідити нульовий розв'язок на стійкість (931):

17. $\left\|\begin{array}{l} \dot{x} = -f_1(x) \pm g_2(y), \\ \dot{y} = -g_1(y) \mp f_2(x). \end{array}\right.$

18. $\left\| \begin{array}{l} \dot{x} = f_1(x) \pm g_2(y), \\ \dot{y} = g_1(y) \mp f_2(x). \end{array} \right.$

19. $\left\| \begin{array}{l} \dot{x} = f_1(x) \pm g_2(y), \\ \dot{y} = -g_1(y) \pm f_2(x). \end{array} \right.$

20. Показати, що консервативна гамільтонова система просто стійка в даній точці спокою, якщо гамільтоніан має локальний мінімум в цій точці.

21. Знайти сепаратрису нуля в задачі А16.

22. $y(x) = 1 + \int_1^x x\xi^{-2} y(\xi)\,\mathrm{d}\xi$.

23. $x(t) = \sin t + 1/2 \int_0^t \tau^2 x(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$

Розв'язати функціональне рівняння:

24. (Д809) $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

25. (Д812) $f(x+y) = f(x)f(y)$.

26. (Д814) $f(xy) = f(x) + f(y)$.

27. (Д815) $f(xy) = f(x)f(y)$.

28. (Д818) $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$.

29. (розподіл Максвела) $f(x+y+z) = g(x)g(y)g(z)$.

Відповіді

A5. $x = \operatorname{sh} t$.
A6. $x = e^t(1 - t + t^2/2)$.
A7. $x = -5/9 \sin t + 4/9 \sin 2t - t/3 \cos 2t$.
A8. $x = e^{-t}$, $y = e^{-t} + \cos t$.
A16. Нестійкий, $V = x + y$.
A17. Асимптотично стійкий, $V = e^{F_2+G_2} - 1$, де $F_2(x) = \int_0^x f_2(\xi)\,\mathrm{d}\xi$, $G_2(y) = \int_0^y g_2(\eta)\,\mathrm{d}\eta$.
A18. Нестійкий, $V = e^{F_2+G_2} - 1$.
A19. Нестійкий, $V = e^{F_2-G_2} - 1$.
A22. $y = 1/2 + x^{-2}/2$.

Література

[1] Филиппов А. Ф., Сборник задач по дифференциальным уравнениям (Ижевск, РХД, 2000)

[2] Головач Г. П., Калайда О. Ф., Збірник задач з диференціальних та інтегральних рівнянь (К., Техніка, 1997)

[3] Ляшко І. І., Боярчук О. К., Гай Я. Г., Калайда О. Ф., Диференціальні рівняння (К., Наукова думка, 1981)

[4] Федорюк М. В., Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (М., Наука, 1983)

[5] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний (М., Физматгиз, 1963)

[6] Юрачківський А. П., Жугаєвич А. Я., Математична фізика в прикладах і задачах (ВПЦ Київський університет, 2005).