Математична фізика в прикладах і задачах: додаткові задачі

Юрачківський А. П., Жугаєвич А. Я.

4 квітня 2010 р.

§ 1. Класифікація лінійних рівнянь другого порядку

Звести до канонічного вигляду і спростити рівняння (задачі з Владимирова):

1. $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 6u_{zz} = 0.$

2. $4u_{xx} - 4u_{xy} - 2u_{yz} + u_y + u_z = 0.$

3. $u_{xy} - u_{xz} + u_x + u_y - u_z = 0.$

4. $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 2u_{zz} = 0.$

5. $u_{xx} + 2u_{xy} - 4u_{xz} - 6u_{yz} - u_{zz} = 0.$

1.1. $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} = 0$, $\xi = x$, $\eta = y - x$, $\zeta = x - y/2 + z/2$.
1.2. $u_{\xi\xi} - +u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + u_\eta = 0$, $\xi = x/2$, $\eta = x/2 + y$, $\zeta = -x/2 - y + z$.
1.3. $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + 2u_\xi = 0$, $\xi = x + y$, $\eta = y - x$, $\zeta = y + z$.
1.4. $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0$, $\xi = x$, $\eta = y - x$, $\zeta = 2x - y + z$.
1.5. $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} - u_{\zeta\zeta} = 0$, $\xi = x$, $\eta = y - x$, $\zeta = 3x/2 - y/2 + z/2$.

§ 3. Рівняння параболічного і гіперболічного типів на відрізку

Розв'язати задачу Коші з однорідними межовими умовами:

1. $$\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx} + \cos^2 \omega t \cos x, \\ u_x(0,t) = u(\pi/2,t) = 0, \\ u(x,0) = \sin 2x, \\ u_t(x,0) = 0. \end{array} \right.$$

2. $$\left\| \begin{array}{l} u_{tt} + u_t = e^{-2t} u_{xx} + \sin t, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = \cos^2 x, \\ u_t(x,0) = 0. \end{array} \right.$$

3. $$\left\| \begin{array}{l} u_t = a^2 u_{xx} + g(t)(u - U), \\ u(0,t) = u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = x. \end{array} \right.$$

4. $$\left\| \begin{array}{l} u_t = a^2 u_{xx} - g(t)(u - U), \\ u(0,t) = u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \cos^2 \frac{\pi x}{2l}. \end{array} \right.$$

5. $$\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u_x(0,t) - hu(0,t) = u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 1. \end{array} \right.$$

6. $$\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin x, \\ u(0,t) = u_x(l,t) + hu(l,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0. \end{array} \right.$$

7. $$\left\| \begin{array}{l} u_t = u_{xx} + \cos x, \\ u_x(0,t) - hu(0,t) = 0, \\ u_x(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = 0. \end{array} \right.$$

8. $\left\|\begin{array}{l} u_t = u_{xx}, \\ u(0,t) = 0, \\ u_x(\pi,t) + hu(\pi,t) = 0, \\ u(x,0) = \sin x. \end{array}\right.$

9. $\left\|\begin{array}{l} u_t = u_{xx}, \\ u_x(-1,t) - hu(-1,t) = 0, \\ u_x(1,t) + hu(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 1. \end{array}\right.$

Розв'язати задачу Коші з неоднорідними межовими умовами:

10. $\left\|\begin{array}{l} u_t = a^2 u_{xx} - \sin\frac{3\pi x}{2l}\cos\frac{\pi x}{l} + x, \\ u_x(0,t) = t, \quad u_x(l,t) = \cos t, \\ u(x,0) = \sin^2\frac{3\pi x}{4l}. \end{array}\right.$

11. $\left\|\begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx} - 2\mu u_t - hu, \\ u(0,t) = 1, \quad u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0. \end{array}\right.$

12. $\left\|\begin{array}{l} u_t = a^2 u_{xx} + 2\sin\frac{\pi x}{2l}\cos\frac{\pi x}{l} + \cos t + 2x(t+1), \\ u(0,t) = \sin t, \quad u_x(l,t) = (t+1)^2, \\ u(x,0) = 2\sin\frac{3\pi x}{2l}\cos\frac{\pi x}{l} + x. \end{array}\right.$

13. $\left\|\begin{array}{l} u_t = a^2 u_{xx} + x\,\mathrm{sh}\,t, \\ u_x(0,t) = \mathrm{ch}\,t, \quad u_x(l,t) + hu(l,t) = (1+hl)\,\mathrm{sh}\,t, \\ u(x,0) = x. \end{array}\right.$

14. $\left\|\begin{array}{l} (t^2+1)u_t = 2tu_{xx} + t(t^2+1)\cos\frac{x}{2} + (t^2+1)(\pi - x) + 2x, \\ u(0,t) = \pi t, \quad u(\pi,t) = 2\pi\,\mathrm{arctg}\,t, \\ u(x,0) = \sin\frac{x}{2}. \end{array}\right.$

15. $\left\|\begin{array}{l} u_{tt} = a^2 u_{xx} + 2\cos^2\frac{\pi x}{2l} - (2x^2 + a^2)\sin 2t, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = l\sin 2t, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \sin^2\frac{\pi x}{l} + x^2. \end{array}\right.$

16. $\left\|\begin{array}{l} u_{tt} = a^2 u_{xx} + 2x, \\ u(0,t) = (1+hl)(t+1), \quad u_x(l,t) + hu(l,t) = (1+hl)t^2, \\ u(x,0) = 1 + hl - hx, \quad u_t(x,0) = -hx. \end{array}\right.$

17. $\left\|\begin{array}{l} u_{tt} = a^2 u_{xx} + ht + e^{-t} + 2(hx+1), \\ u_x(0,t) - hu(0,t) = h(1 - e^{-t}), \quad u_x(l,t) = h(t+1)^2, \\ u(x,0) = hx, \quad u_t(x,0) = 2hx - 1. \end{array}\right.$

18. $\left\|\begin{array}{l} u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2t\sin^2\frac{\pi x}{4l} + \omega^2(l - x)\cos\omega t, \\ u_x(0,t) = \cos\omega t, \quad u(l,t) = -t^3/6, \\ u(x,0) = 2\sin\frac{2\pi x}{l}\sin\frac{\pi x}{2l} + x, \quad u_t(x,0) = 2\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi x}{2l}. \end{array}\right.$

19. $\left\|\begin{array}{l} u_{tt} = (x+1)^2 u_{xx} + (x+1)u_x + \sqrt{x+1} + t(x+1), \\ u(0,t) = t^2, \quad u_x(l,t) = t, \\ u(x,0) = (x+1)^{-1}, \quad u_t(x,0) = x. \end{array}\right.$

20. $\left\|\begin{array}{l} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin\omega t - e^{-t} + 2(hx+1), \\ u_x(0,t) - hu(0,t) = he^{-t}, \quad u_x(l,t) = ht^2, \\ u(x,0) = -1, \quad u_t(x,0) = 0. \end{array}\right.$

21. $\left\|\begin{array}{l} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \cos\omega t + xe^{-t}, \\ u(0,t) = (hl+1)t, \quad u_x(l,t) + hu(l,t) = (hl+1)e^{-t}, \\ u(x,0) = \sin x + x, \quad u_t(x,0) = h(x - l). \end{array}\right.$

22. $\left\|\begin{array}{l} u_{tt} = a^2 u_{xx} - \omega^2 t^4 \sin\omega t, \\ u_x(0,t) = 0, \quad u(l,t) = (\omega^2 t^2 - 2)\sin\omega t + 2\omega t\cos\omega t, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0. \end{array}\right.$

23. $\left\|\begin{array}{l} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin\frac{\pi a t}{2l}\cos\frac{\pi x}{2l}\cos\frac{\pi x}{l} + \cos\omega t + (x - l)\,\mathrm{sh}\,t + \mathrm{ch}\,t, \\ u_x(0,t) = \mathrm{sh}\,t, \quad u(l,t) = \mathrm{ch}\,t, \\ u(x,0) = 1 + \sin\frac{\pi x}{2l}\sin\frac{\pi x}{l}, \quad u_t(x,0) = x - 2l\sin^2\frac{5\pi x}{4l}. \end{array}\right.$

24. $\left\|\begin{array}{l} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \cos\frac{3\pi a t}{2l}\cos\frac{3\pi x}{2l} + \omega^2(l\cos\omega t - \sin\omega t), \\ u_x(0,t) = \cos\omega t, \quad u(l,t) = \sin\omega t, \\ u(x,0) = x - l + \sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{3\pi x}{2l}, \quad u_t(x,0) = \omega + \cos\frac{3\pi x}{l}\cos\frac{\pi x}{2l}. \end{array}\right.$

25. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin\frac{5\pi a t}{2l}\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{3\pi x}{2l} + (l-x)\sin\omega t + le^t, \\ u_x(0,t) = t, \quad u(l,t) = le^t, \\ u(x,0) = l + \sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{3\pi x}{2l}, \quad u_t(x,0) = x + \cos^2\frac{\pi x}{2l}. \end{array} \right.$

26. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin\omega t - \frac{2t}{(1+t^2)^2} + \cos\frac{\pi a t}{2l}\sin\frac{\pi x}{2l}\cos\frac{\pi x}{l}, \\ u(0,t) = \operatorname{arctg} t, \quad u_x(l,t) = 1, \\ u(x,0) = x + \sin\frac{5\pi x}{2l}, \quad u_t(x,0) = 1 + \cos\frac{\pi x}{l}\sin\frac{3\pi x}{2l}. \end{array} \right.$

27. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = a^2 u_{xx} + x\sin\omega t - \frac{1}{(1+t)^2} + x\operatorname{ch} t + \cos\frac{5\pi a t}{2l}\sin\frac{\pi x}{l}\cos\frac{3\pi x}{2l}, \\ u(0,t) = \ln(1+t), \quad u_x(l,t) = \operatorname{ch} t, \\ u(x,0) = x + \sin\frac{3\pi x}{2l}, \quad u_t(x,0) = 1 + \sin\frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi x}{2l}. \end{array} \right.$

28. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \cos\frac{5\pi a t}{2l}\sin\frac{5\pi x}{2l} + \frac{2}{(1+t)^3} + (l-x)\cos\omega t - \frac{2tx}{(1+t^2)^2}, \\ u(0,t) = (1+t)^{-1}, \quad u_x(l,t) = \operatorname{arctg} t, \\ u(x,0) = 1 + \sin\frac{\pi x}{l}\cos\frac{3\pi x}{2l}, \quad u_t(x,0) = x - 1 + \sin\frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi x}{2l}. \end{array} \right.$

§ 4. Рівняння еліптичного типу в прямокутнику

Розв'язати спектральну задачу на сфері:

1. $\left\| \begin{array}{l} \Delta_{\vartheta\phi} u + \lambda u = 0, \\ |u(0,\phi)| < \infty, \quad u(\pi/2,\phi) = 0, \\ u(\vartheta,0) = 0, \quad u(\vartheta,\pi) = 0. \end{array} \right.$

2. $\left\| \begin{array}{l} \Delta_{\vartheta\phi} u + \lambda u = 0, \\ |u(0,\phi)| < \infty, \quad u(\theta_0,\phi) = 0, \\ u(\vartheta,\phi+2\pi) = u(\vartheta,\phi). \end{array} \right.$

Розв'язати задачу Коші в прямокутнику:

3. $\left\| \begin{array}{l} u_t = \Delta u, \\ u(t,0,y) = 0, \quad u(t,a,y) = 1, \\ u(t,x,0) = 0, \quad u(t,x,b) = 0, \\ u(0,x,y) = 0. \end{array} \right.$

4. $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = \Delta u, \\ u(t,0,y) = 0, \quad u(t,\pi,y) = 0, \\ u(t,x,0) = 0, \quad u(t,x,\pi) = 0, \\ u(0,x,y) = u_0(x,y), \\ u_t(0,x,y) = 0. \end{array} \right.$

4.3. $u(x,y,t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}(1-(-1)^m)}{\pi^2 nm}\frac{\lambda_n^2}{\lambda_n^2+\mu_m^2}\left(1 - e^{-(\lambda_n^2+\mu_m^2)t}\right)\sin\lambda_n x\sin\mu_m y$, $\lambda_n = \frac{\pi n}{a}$, $\mu_m = \frac{\pi m}{b}$, $n,m \in \mathbb{N}$.

§ 6. Рівняння Пуассона у сферичних областях

Розв'язати рівняння Пуассона:

1. $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = 0, \quad r < 1,\ \vartheta < \pi/2, \\ u(r,\pi/2,\phi) = 0, \\ u(1,\vartheta,\phi) = 1. \end{array} \right.$

2. $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = 0, \quad r > 1,\ \vartheta < \pi/2, \\ u(r,\pi/2,\phi) = 0, \\ u_r(1,\vartheta,\phi) = 1. \end{array} \right.$

3. $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = 0, \quad r < 1,\ \vartheta < \pi/2, \\ u(r,\vartheta,0) = u(r,\vartheta,\pi/2) = r\sin\vartheta, \\ u(r,\pi/2,\phi) = r, \\ u(1,\vartheta,\phi) = \sin\vartheta. \end{array} \right.$

4. $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = 0, \quad r < 1,\ \vartheta < \vartheta_0 < \pi, \\ u(r,\vartheta_0,\phi) = r, \\ u(1,\vartheta,\phi) = 1. \end{array} \right.$

Розв'язати задачу Коші:

5. $\left\| \begin{array}{l} u_t = \Delta u, \quad r < 1, \\ u(1,\vartheta,\phi,t) = 0, \\ u(r,\vartheta,\phi,0) = u_0(r). \end{array} \right.$

§ 7. Рівняння Пуассона в циліндричних областях

Розв'язати рівняння Пуассона в циліндричній області:

1. $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = 0, \\ u(b,\phi,z) = 2\sin(\phi/2)\sin 2\pi z\cos\pi z, \\ u(\rho,0,z) = 0, \quad u_\phi(\rho,\pi,z) = 0, \\ u(\rho,\phi,0) = 0, \quad u(\rho,\phi,1) = 0. \end{array} \right.$

2. $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = \rho^{-1/2}\cos(\phi/2)\cos^3\pi z, \\ u(b,\phi,z) = \cos(3\phi/2), \\ u_\phi(\rho,0,z) = 0, \quad u(\rho,\pi,z) = 0, \\ u_z(\rho,\phi,0) = 0, \quad u_z(\rho,\phi,1) = 0. \end{array} \right.$

3. $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = \rho^{-1/2}\sin(\phi/2)\sin(\pi z/l), \\ u(a,\phi,z) = 0, \quad u(b,\phi,z) = 0, \\ u(\rho,0,z) = 0, \quad u_\phi(\rho,\pi,z) = 0, \\ u(\rho,\phi,0) = 0, \quad u(\rho,\phi,l) = 0. \end{array} \right.$

4. $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = 0, \\ u(a,\phi,z) = \cos(\phi/2)\cos(\pi z/2), \\ u(b,\phi,z) = \cos(\phi/2)\sin(\pi z/2), \\ u_\phi(\rho,0,z) = 0, \quad u(\rho,\pi,z) = 0, \\ u(\rho,\phi,0) = 0, \quad u(\rho,\phi,1) = 0. \end{array} \right.$

5. $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = z\sin 2\phi + \rho^2\cos\pi z, \\ u(b,\phi,z) = 2z\sin^2\phi, \\ u_z(\rho,\phi,0) = \cos 2\phi, \ u_z(\rho,\phi,1) = \rho^2. \end{array} \right.$

6. $\left\| \begin{array}{l} \Delta u - c^2 u = 0, \\ u(b,\phi,z) = 2\sin(\phi+\pi/4)\sin\pi z, \\ u(\rho,\phi,0) = \rho\cos\phi, \\ u(\rho,\phi,1) = \rho^3\sin\phi. \end{array} \right.$

7. $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = \rho z^2\cos\phi, \\ u(a,\phi,z) = 2\sin 2\phi\sin\pi z\cos 2\pi z, \\ u_\rho(b,\phi,z) = 0, \\ u(\rho,\phi,0) = 0, \quad u(\rho,\phi,1) = 0. \end{array} \right.$

8. $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = f(\rho)\sin\phi, \\ u(a,\phi,z) = 0, \ u(b,\phi,z) = \cos\pi z, \\ u_z(\rho,\phi,0) = 0, \ u_z(\rho,\phi,1) = \rho^2\sin^2\phi. \end{array} \right.$

9. $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = 0, \\ u_\rho(b,\phi,z) = \sin(3\phi/2)\sin 3\phi\sin 2\pi z, \\ u_\phi(\rho,0,z) = 0, \quad u(\rho,\pi/3,z) = 0, \\ u(\rho,\phi,0) = 0, \\ u_z(\rho,\phi,1) = \sqrt{\rho}\cos(3\phi/2). \end{array} \right.$

10. $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = 0, \\ u_\rho(a,\phi,z) = 0, \\ u(b,\phi,z) = \cos(3\phi/2)\sin\pi z, \\ u_\phi(\rho,0,z) = 0, \ u_\phi(\rho,2\pi/3,z) = 0, \\ u(\rho,\phi,0) = \sqrt{\rho}\cos^3(3\phi/2), \\ u(\rho,\phi,1) = 0. \end{array} \right.$

11. $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = \sqrt{\rho z}\sin(3\phi/2), \\ u(a,\phi,z) = 2\sin 3\phi\cos(3\phi/2), \\ u(\rho,0,z) = 0, \quad u_\phi(\rho,\pi/3,z) = 0, \\ u_z(\rho,\phi,0) = 0, \quad u_z(\rho,\phi,1) = 0. \end{array} \right.$

§ 12. Рівняння еліптичного типу в $\mathbb{R}^d$

1. Нехай межа області складається з гіперплощин так, що віддзеркалення в них породжують дискретну групу Г. Знайти функцію Гріна області, розглянувши межові умови першого і другого роду.

2. Знайти функцію Гріна області між двома паралельними гіперплощинами $x_1 = 0$ і $x_1 = a$.

3. Знайти функцію Гріна області $0 < x_1 < a$, $x_2 > 0$.

4. Знайти всі значення двогранного кута між площинами в $\mathbb{R}^d$, при яких застосовний метод зображень, і знайти відповідну функцію Гріна.

5. Знайти всі можливі розташування прямих на площині, коли застосовний метод зображень.

6. Знайти всі можливі розташування площин зі спільною точкою в тривимірному просторі, коли застосовний метод зображень.

7. Знайти всі можливі розташування площин в тривимірному просторі, коли застосовний метод зображень.

8. У вузлах двовимірної ромбічної гратки розташовані одиничні позитивні заряди, а в центрі кожного ромбу знаходиться одиничний негативний заряд. Використовуючи зворотній метод зображень, знайти електростатичний потенціал цієї системи, а також енергію на елементарну комірку.

9. Використовуючи зворотній метод зображень, знайти сталу Маделунга гратки NaCl, тобто електростатичну енергію на один атом при одиничних заряді і відстані між найближчими сусідами.

10. Методом відокремлення змінних побудувати функцію Гріна оператора Лапласа в паралелепіпеді $(0,a)\times(0,b)\times(0,c)$ з межовими умовами першого роду.

11. Для виразу $|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^{-1}$ одержати розклад в ряд типу 12.25 по сферичних гармоніках.

12. Для виразу $|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^{-1}$ одержати розклад в ряд типу 12.25 по власних функціях оператора Лапласа в еліптичних координатах.

12.1. $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \sum_{g\in\Gamma}(\mp 1)^{\det g}\, G_d\left(|g\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|\right)$, де верхній знак відповідає межовим умовам першого роду, а нижній – другого. Збіжність ряду випливає з інтегровності G_d.

12.2. $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[G_d\left(|\boldsymbol{x} + 2na\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{\xi}|\right) \mp G_d\left(|\sigma_1\boldsymbol{x} + 2na\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{\xi}|\right)\right]$, де $\boldsymbol{e}_1$ – одиничний вектор вздовж координати x_1, а σ_1 відбиття в площині $x_1 = 0$.

12.3. $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[G_d\left(|\boldsymbol{x} + 2na\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{\xi}|\right) \mp G_d\left(|\sigma_1\boldsymbol{x} + 2na\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{\xi}|\right) \mp G_d\left(|\sigma_2\boldsymbol{x} + 2na\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{\xi}|\right) + G_d\left(|\sigma_1\sigma_2\boldsymbol{x} + 2na\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{\xi}|\right)\right]$ де $\boldsymbol{e}_1$ – одиничний вектор вздовж координати x_1, а σ_i – відбиття в площині $x_i = 0$.

12.4. Можливі значення кута $\pi m/n$, де $m < n$ пара взаємно простих натуральних чисел. Група віддзеркалень D_n. Справді, якщо σ і σ' операції віддзеркалень в заданих площинах, то їх добуток $\sigma'\sigma$ буде операцією c_n^m повороту на кут $2\pi m/n$ в напрямі від площини σ до σ'. Оскільки m і n взаємно прості, то c_n належить групі віддзеркалень, яка породжується парою $\{c_n, \sigma\}$.

12.5. Якщо прямих дві, то це або двогранний кут (задача 12.4), або задача 12.2. Якщо дві прямі паралельні, а третя перпендикулярна до них, то це задача 12.3. В інших випадках задача зводиться до відшукання всеможливих відзеркалень, які породжують дискретну групу. Це одна з двовимірних кристалографічних груп, породжуваних належними до них віддзеркаленнями: $pmm2$, $p4mm$, $p3m1$, $p6mm$. Першому випадку відповідає задача в прямокутнику, який є четвертою частиною елементарної комірки Браве групи $pmm2$.

Група $p4mm \supset pmm2$ містить прямі віддзеркалень, розташовані під кутом $\pi/4$ одно відносно одної таким чином, що точки перетину лежать у вузлах квадратної гратки (наприклад рівнобедрений прямокутний трикутник). Група $p3m1$ містить прямі під кутом $\pi/3$ одна до одної з точками перетину у вузлах трикутної гратки (наприклад рівносторонній трикутник). Група $p6mm \supset p3m1$ додатково має прямі, що перетинаються під кутом $\pi/6$ (наприклад половина рівностороннього трикутника).

12.6. Задача зводиться до відшукання всеможливих наборів віддзеркалень з нерухомою точкою, які породжують скінченну групу. Є всього 5 класів скінченних груп, породжуваних належними до них віддзеркаленнями (в дужках вказаний їх порядок, $n \in \mathbb{N}$): C_{nv} $(2n)$, D_{nh} $(4n)$, T_d (24), O_h (48), Y_h (120). Перший клас – всі двогранні кути. Наступний – всі тригранні кути, в яких одна з граней перпендикулярна до двох інших. Група тетраедра T_d має 6 площин віддзеркалень, що проходять через діагоналі протилежних граней куба. Будь-які три або більше цих площин утворюють многогранний кут, групою віддзеркалень якого є T_d. Наступна група $O_h \supset T_d$ містить додатково до вже згаданих шести площин ще шість, що проходять через протилежні ребра кубу. Нарешті, група Y_h має 15 площин, що проходять через протилежні ребра ікосаедра.

12.7. ??

12.8. Помістимо початок системи координат в один із позитивних зарядів, а осі зорієнтуємо так, щоб найближчі сусіди (ними будуть негативні заряди) знаходилися у точках $(\pm 2a, 0)$ і $(0, \pm 2b)$, де a і b – параметри гратки (довжина сторони ромбу $2\sqrt{a^2+b^2}$). Використовуючи метод зображень у зворотньому напрямі, легко бачити, що шукана електростатична задача еквівалентна задачі в прямокутнику $|x| < a$, $|y| < b$ із заземленою межею. Розв'язок останньої одержимо знайшовши конформне відображення прямокутника в одиничний круг:

$$w(z) = \frac{1 - \operatorname{cn}(Kz/a)}{\operatorname{sn}(Kz/a)},$$

де K – еліптичний інтеграл, а cn, sn – еліптичні функції Якобі, всі три неявно залежать модуля k, який знаходиться з рівняння

$$K(k)/K'(k) = a/b,$$

тут і далі штрихом позначаємо еліптичні функції модуля $k' = \sqrt{1-k^2}$. Зауважимо, що записане конформне відображення переводить початок координат у центр круга, а вершини прямокутника $\pm a \pm ib$ у точки $\pm k \pm ik'$. Електростатичний потенціал знаходимо за формулою

$$\varphi(x,y) = \ln\frac{1}{|w(x+iy)|} \equiv \frac{1}{2}\ln\frac{1+\operatorname{cn}(Kx/a)\operatorname{cn}'(K'y/b)}{1-\operatorname{cn}(Kx/a)\operatorname{cn}'(K'y/b)}.$$

За відомими властивостями періодичності еліптичних функцій продовження одержаного розв'язку на всю площину дається цим же виразом. Енергію обчислюємо за формулою

$$E = \sum_i q_i \varphi_i,$$

де підсумовування проводиться по елементарній комірці,

$$\varphi_i = \lim_{\rho\to 0}\left[\varphi\left(\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{\rho}\right) + q_i \ln\rho\right]$$

– потенціал i-го заряду, q_i і $\boldsymbol{r}_i$ – величина і положення i-го заряду. В результаті одержимо $E = 2\ln(2a/K)$.

12.9. Як і в задачі 12.8, потенціал гратки NaCl відтворюється антиперіодичним продовженням потенціалу одиничного заряду в центрі одиничного куба із заземленою межею. Стала Маделунга співпадає з потенціалом φ_0 цього заряду (з точністю до знаку).

Перший спосіб. Позначимо

$$\varphi\left(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0\right) = -4\pi G\left(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0\right) - \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|},$$

тоді

$$\varphi_0 = \varphi\left(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r}_0\right).$$

Функція φ як функція першого аргументу задовольняє рівняння Лапласа в кубі з межовою умовою

$$\varphi\left(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0\right)\Big|_{\boldsymbol{r}\in\partial D} = -\left.\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|}\right|_{\boldsymbol{r}\in\partial D}.$$

Розв'язок рівняння Лапласа в методі відокремлення змінних дається виразом

$$\varphi\left(x,y,z;\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \sin\pi nx \sin\pi my \frac{\operatorname{sh}\lambda_{nm}z + \operatorname{sh}\lambda_{nm}(1-z)}{\operatorname{sh}\lambda_{nm}z} c_{nm}$$

$$+ \text{ два аналогічні вирази з переставленими } x, y, z,$$

де

$$\lambda_{nm} = \pi\sqrt{n^2+m^2}, \quad c_{nm} = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{\sin\pi nx \sin\pi my \; \mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(x-1/2)^2+(y-1/2)^2+1/4}}.$$

Підставивши $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0$ і врахувавши симетрію задачі, одержимо

$$\varphi_0 = -24\sum_{n,m\in\mathbb{M}} \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}\sqrt{n^2+m^2}} \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{\cos\frac{\pi nx}{2}\sin\frac{\pi my}{2}}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

де $\mathbb{M}$ – множина всіх непарних додатних чисел.

Другий спосіб. Використовуючи обчислену в задачі 12.10 функцію Гріна паралелепіпеда, одержимо

$$\varphi_0 = \lim_{\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{r}_0}\left[-4\pi G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0) - \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}\right] \equiv \lim_{z\to+0}\left[-4\pi G(\boldsymbol{r}_0 - z\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{r}_0) - \frac{1}{z}\right]$$
$$= \lim_{z\to+0}\left[8\sum_{n,m\in\mathbb{M}}\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}\sqrt{n^2+m^2}(1-2z)}{\sqrt{n^2+m^2}\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}\sqrt{n^2+m^2}} - \frac{1}{z}\right].$$

Зауважимо, що обидва способи дають далеко не найкращі формули для обчислення сталої Маделунга гратки NaCl, хоча значно кращі прямого підсумовування потенціалів окремих зарядів. Зокрема, перша формула з 4×4 членами ряду дає $\varphi_0 = -1.747563(2)$.

12.10.

$$G(x,y,z;\xi,\eta,\zeta) = -\frac{4}{ab}\sum_{n,m=1}^{\infty}\sin\frac{\pi nx}{a}\sin\frac{\pi my}{b}\sin\frac{\pi n\xi}{a}\sin\frac{\pi m\eta}{b}\frac{\operatorname{sh}\lambda_{nm}(z\wedge\zeta)\operatorname{sh}\lambda_{nm}(c-z\vee\zeta)}{\lambda_{nm}\operatorname{sh}\lambda_{nm}c},$$

тут

$$\lambda_{nm} = \pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}.$$

12.11.

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{(2l+1)\left\|Y_{lm}\right\|^2}(r_1\vee r_2)^{-l-1}Y_{lm}(\theta_1,\phi_1)\ (r_1\wedge r_2)^l\overline{Y_{lm}}(\theta_2,\phi_2).$$

12.12.

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|} = \frac{2}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{4\pi}{\left\|Y_{nm}\right\|^2}\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}Q_n^{|m|}(\operatorname{ch}\xi_1\vee\xi_2)\,Y_{nm}(\eta_1,\phi_1)P_n^{|m|}(\operatorname{ch}\xi_1\wedge\xi_2)\,\overline{Y_{nm}}(\eta_2,\phi_2)$$