Представлення груп

Представлення: відображення $g \to T_g$ таке, що $g_1 g_2 \to T_{g_1} T_{g_2}$.

Приклади:

- Самопредставлення: $g \to g$ (векторне представлення груп просторових симетрій)
- Одновимірні представлення групи C_n: $c_n^m \to e^{i2\pi m/n}$
- $g \to \det g, \quad g \to g \det g$
- Двовимірні представлення групи C_{nv}:

$$\mathrm{T}[c_n] = \begin{pmatrix} e^{i2\pi m/n} & 0 \\ 0 & e^{-i2\pi m/n} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{T}[\sigma_v] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Представлення прямого добутку $G \times I$:

	G	$i \cdot G$
R_g	M	M
R_u	M	$-M$

- *Індуковане* представлення у просторі функцій на $\mathbb{R}^3$:

$$T_g \psi(\vec{r}) = \psi(g^{-1}\vec{r})$$

- *Тензорний добуток* представлень:

$$\left(T_g \otimes T'_g\right)_{ii'}^{jj'} = \left(T_g\right)_i^j \left(T'_g\right)_{i'}^{j'}$$

Незвідні представлення

Незвідне представлення неможливо подати у вигляді прямої суми.

Приклади:

Незвідні представлення групи C_{2v}:

g	e	c_2	σ_x	σ_y
T_g	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
B_1	1	-1	-1	1
B_2	1	-1	1	-1
A_1	1	1	1	1
A_2	?	?	?	?

Дійсне незвідне, але комплексно звідне представлення C_4:

g	e	c_4	c_4^2	c_4^3
T_g	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$
T'_g	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix}$

де $T'_g = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix}-i&1\\1&-i\end{smallmatrix}\right) T_g \left(\begin{smallmatrix}i&1\\1&i\end{smallmatrix}\right)$

Розклад на незвідні

Характер представлення T: функція $\chi(g) = \operatorname{tr} T_g$.

- постійна на класах спряжених елементів: $\chi(hgh^{-1}) = \chi(g)$
- $\chi(e)$ – розмірність представлення
- ортогональна для різних представлень
- кількість незвідних представлень Γ у заданому представленні

$$\frac{1}{\operatorname{ord} G} \sum_{C_g} \operatorname{ord} C_g \; \overline{\chi_\Gamma(g)} \; \chi(g)$$

Таблиця незвідних представлень: ../PointG/tab_PGrep.dvi (pdf)

Приклад: векторне представлення групи C_{2v}

	g	e	c_2	σ_x	σ_y
	$\chi(g)$	3	-1	1	1
1	A_1	1	1	1	1
1	B_1	1	-1	1	-1
.	A_2	1	1	-1	-1
1	B_2	1	-1	-1	1

Приклад: тензорне V^2 представлення групи T_d

	g	e	$8c_3$	$3u_2$	$6c_{4i}$	$6\sigma_v$
	$\chi(g)$	3^2	0	$(-1)^2$	$(-1)^2$	1^2
?	A_1	1	1	1	1	1
?	A_2	1	1	1	-1	-1
?	E	2	-1	2	0	0
?	F_1	3	0	-1	1	-1
?	F_2	3	0	-1	-1	1