

Київський Національний університет імені Тараса Шевченка

*А. П. Юрачківський, А. Я. Жугаєвич*

# Математична фізика в прикладах і задачах

Навчальний посібник  
для студентів природничих факультетів

Київ  
Видавничо-поліграфічний центр  
«Київський університет»  
2005

УДК 530.145  
ББК 22.331

версія від 7.08.2020

А. П. Юрачківський, А. Я. Жугаєвич  
**Математична фізика в прикладах і задачах:** Навчальний посібник для студентів природничих факультетів. — К.: ВПЦ «Київський університет», 2005.-159 с.

Рецензенти: Висоцький Володимир Іванович, докт. фіз.-мат. наук,  
Голод Петро Іванович, канд. фіз.-мат. наук.

Затверджено Радою  
радіофізичного факультету  
?? ??? 2004 року

????????-??  
РВЦ «Київський університет»

ББК 22.31

У посібнику докладно викладено методи відокремлення змінних і функцій впливу. Розв'язано 80 задач різної складності. Кожний параграф містить короткі теоретичні відомості і задачі для самостійного розв'язування. Для студентів і аспірантів фізико-математичних спеціальностей.

# Зміст

<b>Передмова</b>	<b>4</b>
<b>Вступ</b>	<b>6</b>
§ 1. Класифікація лінійних диференціальних рівнянь другого порядку в частинних похідних . . . . .	6
<b>Частина 1. Метод відокремлення змінних</b>	<b>16</b>
§ 2. Задача Штурма–Ліувіля . . . . .	16
§ 3. Крайові задачі для рівнянь параболічного і гіперболічного типів на відрітку . . . . .	24
§ 4. Рівняння еліптичного типу в прямокутнику . . . . .	38
§ 5. Рівняння Пуассона в кругових областях . . . . .	48
§ 6. Рівняння Пуассона у сферичних областях . . . . .	55
§ 7. Рівняння Пуассона в циліндричних областях . . . . .	62
<b>Частина 2. Метод функцій впливу</b>	<b>72</b>
§ 8. Узагальнені функції . . . . .	73
§ 9. Рівняння дифузії в $\mathbb{R}^d$ . . . . .	80
§ 10. Лінійні диференціальні задачі для рівнянь коливань і дифузії на прямій, півпрямій і відрітку . . . . .	91
§ 11. Хвильове рівняння в $\mathbb{R}^d$ . . . . .	112
§ 12. Рівняння еліптичного типу в $\mathbb{R}^d$ . . . . .	122
<b>Відповіді до задач</b>	<b>143</b>
<b>Література</b>	<b>157</b>

# Передмова

З математичної фізики є ряд відомих теоретичних курсів [6, 11, 12, 16, 24, 25] і збірників задач [7, 9, 22]. Між першими і другими повинна бути сполучна ланка — посібники з розв’язування задач. Це і є основне призначення даної книги, яка може служити також і задачником. Від аналогічних книг [8, 10, 15] вона відрізняється як тематично, так і, в деяких моментах, концептуально. Ми включили в неї тільки той матеріал, який складає ядро курсу математичної фізики. Це два основні методи — відокремлення змінних і функцій впливу. У нашому викладі першого з них підстановка в однорідне диференціальне рівняння гаданого розв’язку  $u(x, t) = X(x)T(t)$  не є складовою частиною методу ні на ідейному, ні на алгоритмічному рівні. Суть же його в тому, що розв’язок крайової задачі шукається у вигляді розкладу по власних функціях пов’язаної з нею спектральної задачі, спектр якої дискретний. У типовому випадку достатньою (але, як показують задачі в доповненні до круга або кулі, не необхідною) умовою дискретності спектра є обмеженість області, в якій ставиться задача. (Існують і тонші достатні умови [17], але вони значно складніші). Тому в посібнику, як і в згаданих вище джерелах, метод відокремлення змінних викладено для задач з обмеженою областю зміни (відрізок, прямокутник, круг, куля, циліндр тощо) просторової змінної. Натомість метод функцій впливу застосовуємо переважно до задач у необмежених областях — почасти щоб уникнути дублювання, але насамперед слідуючи логіці методу, для якого найпростішими є задачі в  $\mathbb{R}^d$ . Утім є важливий клас задач, до яких метод відокремлення змінних застосовний і без припущення дискретності спектра (так що будова області неістотна). Нехай, наприклад, задача для функції  $u$  змінних  $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^d$  і  $t \in \mathbb{R}_+$  складається з рівняння

$$Mu = Lu + f,$$

у якому  $M$  — многочлен  $m$ -го степеня від  $\partial/\partial t$ , а  $L = \nabla \cdot (p\nabla) - q$ , однорідної межевої умови (якщо межа непорожня) і початкових умов

$$\frac{\partial^i u}{\partial t^i}(\mathbf{x}, 0) = \varphi_i(\mathbf{x}), \quad i = 0, \dots, m-1.$$

Тоді якщо  $\varphi_0, \dots, \varphi_m$  і  $f(\cdot, t)$  є лінійними комбінаціями скінченного числа власних функцій спектральної задачі для оператора  $L$  в області  $D$  з тією самою межевою умовою, то й  $u(\cdot, t)$  є лінійною комбінацією цих же функцій. Кілька таких задач поміщено в другу частину. Формальною підставою для “підселення” є те, що вони ставляться в  $\mathbb{R}^d$  і, таким чином, не вписуються в загальну схему методу відокремлення змінних. Посутня ж причина полягає в тому, що їх можна розв’язувати обома методами, як продемонстровано в прикладах 9.1, 9.2, 11.2 і 11.7.

Розміщення матеріалу в другій частині дещо незвичне: між задачами в  $\mathbb{R}^d$  для рівнянь дифузії (§ 9) і коливань (§ 11) вклинюються задачі на

прямий, півпрямий і відрізок для рівнянь обох типів (§ 10). На це є дві причини. По-перше, ізотропна задача Коші для хвильового рівняння в тривимірному просторі зводиться до крайової задачі для такого ж рівняння на півпрямій (приклад 11.4). По-друге, спосіб зведення задачі на промені чи відрізок до задачі на прямій, однаковий для обох типів рівнянь (приклади 10.4 і 10.11).

Перша частина книги являє собою скорочений і перероблений варіант посібника [27]. Елементарний, наскільки можливо, виклад основ теорії спектральних задач і початкових відомостей про використання в математичній фізиці спеціальні функції можна знайти в [5]. Для глибокого ознайомлення з цими питаннями рекомендуємо книги [2, 3, 4, 17, 18, 20].

Повноцінний курс математичної фізики неможливий без апарату узагальнених функцій — хоча б тому, що такими є деякі функції впливу. У зв'язку з цим ми відвели узагальненим функціям окремий параграф і включили їх в умови ряду задач для самостійного розв'язування. Але в прикладах не виходимо за рамки класичних постановок і класичного поняття функції, бо це той рівень, на якому потрібно міцно закріпитися, перш ніж рухатись далі.

Теорію і приклади до § 1–11 написав А. П. Юрачківський, до § 12 — А. Я. Жугаєвич. Задачі до всіх параграфів добирали обидва автори. Відповіді даються до задач, призначених для аудиторних занять і домашніх завдань.

Працюючи над книгою, ми неодноразово обговорювали написане з Є. Д. Білоколом і Д. Д. Шекою, яким щиро вдячні за критику і поради. Також ми вдячні Л. Л. Зайцевій за вчасно виявлені помилки й неточності. виправлення помічених після виходу книги огріхів плануємо подавати в електронному вигляді за адресою

“<http://matphys.rpd.univ.kiev.ua/ukr/courses/matphys/eqmatphys.html>”.

У книзі використовуються стандартні позначення:

- $C^k(D)$  – простір  $k$  разів неперервно диференційовних функцій на  $D$ ;
- $L_p(D, \rho)$  (при  $\rho = 1$  просто  $L_p(D)$ ) – простір функцій, для яких існує  $\int_D |f(x)|^p \rho(x) dx$ ;
- $\partial D$  – межа області  $D$ ;
- $x \wedge y = \min(x, y)$ ,  $x \vee y = \max(x, y)$ ,  $x_+ = x \vee 0$ .

# Вступ

## § 1. Класифікація лінійних диференціальних рівнянь другого порядку в частинних похідних

У математичній фізиці частинні похідні часто записують без знака диференціювання (штриха, крапки,  $\partial/\partial x$  тощо), просто вказуючи в нижніх індексах ті змінні, по яких воно виконується.

Розглянемо лінійне відносно старших похідних рівняння

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + \Phi = 0. \quad (1.1)$$

Тут  $a, b$  і  $c$  – задані неперервні функції від  $x$  і  $y$ ,  $\Phi$  – заданий диференціальний вираз порядку не вищого за перший.

Рівняння виду (1.1) класифікуються за тими ознаками, які не змінюються при переході до нових змінних. Із них найістотношою є знак функції  $\Delta = b^2 - ac$ , званої *дискримінантом* рівняння. Перейшовши до нових незалежних змінних  $\xi$  і  $\eta$ , перетворимо (1.1) за формулою диференціювання складної функції до вигляду

$$\tilde{a}u_{\xi\xi} + 2\tilde{b}u_{\xi\eta} + \tilde{c}u_{\eta\eta} + \tilde{\Phi} = 0, \quad (1.2)$$

де

$$\tilde{a} = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2, \quad (1.3a)$$

$$\tilde{b} = a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + c\xi_y\eta_y, \quad (1.3b)$$

$$\tilde{c} = a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 \quad (1.3c)$$

і  $\tilde{\Phi}$  – деякий вираз від  $\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta$ . Звідси видно, що

$$\tilde{b}^2 - \tilde{a}\tilde{c} = (\xi_x\eta_y - \eta_x\xi_y)^2(b^2 - ac). \quad (1.4)$$

Таким чином, якщо заміна змінних оборотна (якобіан  $\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}$  відмінний від нуля), то  $\text{sgn } \tilde{\Delta} = \text{sgn } \Delta$ , що дозволяє класифікувати рівняння за знаком дискримінанта. Припустимо, що в деякій області дискримінант рівняння (1.1) зберігає знак або тотожно дорівнює нулю. Тоді кажуть, що в цій області рівняння належить до

- *гіперболічного типу*, якщо  $\Delta > 0$ ,
- *еліптичного типу*, якщо  $\Delta < 0$ ,
- *параболічного типу*, якщо  $\Delta = 0$ .

Нові змінні вибирають так, щоб якомога спростити рівняння. Покажемо, як досягти того, щоб коефіцієнт при мішаній похідній дорівнював нулю, а

кожен із коефіцієнтів при інших двох старших похідних був сталий і рівний одному з трьох чисел 1,  $-1$ , 0. Такий вигляд називають *канонічним*.

Розглянемо спершу випадок  $a = c = 0$ . Тоді  $b \neq 0$  і, значить, рівняння належить до гіперболічного типу. Поділивши обидві його частини на  $2b$  і позначивши  $\bar{\Phi} = \Phi/2b$ , одержимо

$$u_{xy} + \bar{\Phi} = 0. \quad (1.5)$$

Це — *перша канонічна форма рівняння гіперболічного типу* (для інших двох типів такого поняття немає). З неї, перейшовши до нових змінних

$$\xi = x + y, \quad \eta = x - y,$$

одержимо згідно з (1.3) такий окремий випадок рівняння (1.2):

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \tilde{\Phi} = 0 \quad (1.6)$$

( $\tilde{\Phi}$  — вираз від  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $u_\xi$ ,  $u_\eta$ ,  $u$ ). Це — *друга канонічна форма рівняння гіперболічного типу*, яку часто називають просто канонічною (що зробили й ми в попередньому абзаці), розглядаючи форму (1.5) як проміжну. Спосіб зведення до канонічного вигляду транзитом через (1.5) універсальний (у прикладі 1.1 буде показано, як записати в першій канонічній формі довільне рівняння гіперболічного типу), але не завжди доцільний. Опишемо придатний для всіх типів рівнянь і застосовний у всіх випадках, крім щойно розглянутого, прямий спосіб зведення до канонічного вигляду.

Отож, нехай хоча б один із коефіцієнтів  $a$  або  $c$  (для визначеності — перший) відмінний від нуля. Позначимо корені квадратного рівняння

$$a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0 \quad (1.7)$$

через  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$ . Тоді за теоремою Вієта

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -2b/a, \quad \lambda_1 \lambda_2 = c/a,$$

що дозволяє переписати рівності (1.3) у вигляді

$$\tilde{a} = a(\xi_x - \lambda_1 \xi_y)(\xi_x - \lambda_2 \xi_y), \quad (1.8a)$$

$$2\tilde{b} = a[(\xi_x - \lambda_1 \xi_y)(\eta_x - \lambda_2 \eta_y) + (\xi_x - \lambda_2 \xi_y)(\eta_x - \lambda_1 \eta_y)], \quad (1.8b)$$

$$\tilde{c} = a(\eta_x - \lambda_1 \eta_y)(\eta_x - \lambda_2 \eta_y). \quad (1.8c)$$

При  $\Delta \neq 0$  шукаємо  $\xi$  і  $\eta$  як розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \xi_x = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \xi_y + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2\nu} \eta_y, \\ \eta_x = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2\nu} \xi_y + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \eta_y, \end{cases} \quad (1.9)$$

де  $\nu$  — комплексний параметр, який вибираємо так, щоб коефіцієнти рівнянь були дійсними. Оскільки значення  $\lambda_1 + \lambda_2$  завжди дійсне, а  $\lambda_1 - \lambda_2 = \pm 2\sqrt{\Delta}/a$  (знак залежить від нумерації коренів), то можна покласти

$$\nu = \sqrt{\operatorname{sgn} \Delta} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \Delta > 0, \\ i, & \text{якщо } \Delta < 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

Перш ніж інтегрувати систему (1.9), подивимося, що дає такий вибір нових змінних.

З першого рівняння системи (1.9) маємо

$$\xi_x - \lambda_1 \xi_y = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}(\xi_y - \nu \eta_y), \quad \xi_x - \lambda_2 \xi_y = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}(\xi_y + \nu \eta_y),$$

а з другого —

$$\eta_x - \lambda_1 \eta_y = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2\nu}(\xi_y - \nu \eta_y), \quad \eta_x - \lambda_2 \eta_y = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2\nu}(\xi_y + \nu \eta_y).$$

Ці рівності разом з (1.8) показують, що  $\tilde{b} = 0$ ,  $\tilde{c} = -\tilde{a}/\nu^2$ . Тому, поділивши обидві частини рівняння (1.2) на  $\tilde{a}$  ( $\neq 0$ , бо  $\tilde{\Delta} \neq 0$ ), перетворимо його до вигляду

$$u_{\xi\xi} - \nu^{-2}u_{\eta\eta} + \Psi = 0,$$

де  $\Psi$  — диференціальний вираз порядку не вищого за перший. Пригадавши (1.10), можемо записати цю рівність окремо для  $\Delta > 0$  і  $\Delta < 0$ :

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \Psi = 0 \quad (\text{гіперболічний тип}), \quad (1.11a)$$

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \Psi = 0 \quad (\text{еліптичний тип}). \quad (1.11b)$$

Це і є, згідно з даним вище означенням, канонічний вигляд рівняння відповідного типу. Рівність (1.11a) є перепозначенням (1.6), але виведено її цього разу за припущення  $|a| + |c| > 0$ . Таким чином, рівняння гіперболічного типу зводиться до канонічного вигляду завжди. Те саме справджується для рівняння еліптичного типу, оскільки в ньому як  $a$ , так і  $c$  відмінні від нуля.

Щоб зінтегрувати систему (1.9) при  $\Delta \neq 0$ , перейдемо до нових невідомих функцій

$$\alpha_1 = \xi + \nu\eta, \quad \alpha_2 = \xi - \nu\eta, \quad (1.12)$$

в результаті чого вона перетворюється в пару рівнянь, кожне з яких містить тільки одну функцію:

$$\frac{\partial \alpha_j}{\partial x} - \lambda_j \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} = 0. \quad (1.13)$$

Розв'язками рівняння (1.13) є, як відомо, інтеграли<sup>1</sup> звичайного диференціального рівняння

$$\lambda_j dx + dy = 0. \quad (1.14)$$

Нехай  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  — інтеграли рівняння (1.14) при відповідних значеннях  $j$ . Тоді, поклавши  $\alpha_j = \varphi_j$  і виразивши з (1.12) старі функції через нові, дістанемо

$$\xi = (\varphi_1 + \varphi_2)/2, \quad \eta = (\varphi_1 - \varphi_2)/2\nu.$$

Для двох можливих згідно з (1.10) значень  $\nu$  ці вирази конкретизуються так:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}, \quad \eta = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \quad (\Delta > 0), \\ \xi &= \operatorname{Re} \varphi_1, \quad \eta = \operatorname{Im} \varphi_1 \quad (\Delta < 0). \end{aligned} \quad (1.15)$$

<sup>1</sup>Нагадаємо, що диференційовна функція  $\varphi = \varphi(x, y)$  називається інтегралом звичайного диференціального рівняння відносно функції  $y = y(x)$ , якщо для будь-якого розв'язку останнього  $\varphi(x, y(x)) = \text{const}$ .



Як бачимо, при  $\Delta < 0$  з двох рівнянь (1.14) достатньо зінтегрувати одне. Воно й зрозуміло, адже в цьому випадку рівняння, а значить і їхні інтеграли, взаємно комплексно-спряжені.

Досі ми вважали, що з двох не рівних нулю одночасно коефіцієнтів  $a$  і  $c$  відмінний від нуля саме перший. Випадок, коли  $a$  може дорівнювати нулю, а  $c$  ні, зводиться до розглянутого шляхом перепозначення.

Зауважимо насамкінець, що довільна диференційовна функція від інтеграла звичайного диференціального рівняння також є його інтегралом. Тому, зокрема, в (1.15) ділити на 2 необов'язково.

Сказане вище можна підсумувати так. Для того щоб звести рівняння (1.1) з ненульовим дискримінантом до канонічного вигляду, потрібно:

1. У випадку  $\Delta > 0$ ,  $a \neq 0$  знайти інтеграли рівнянь

$$ady - (b - \sqrt{\Delta})dx = 0, \quad ady - (b + \sqrt{\Delta})dx = 0 \quad (1.16)$$

(перепозначення (1.14)), а у випадку  $\Delta > 0$ ,  $c \neq 0$  – рівнянь

$$cdx - (b - \sqrt{\Delta})dy = 0, \quad cdx - (b + \sqrt{\Delta})dy = 0, \quad (1.17)$$

і в обох випадках за нові змінні взяти півсуму і піврізницю (або суму і різницю) їх; у випадку  $\Delta < 0$  знайти інтеграл одного, все одно якого, з рівнянь (1.16), (1.17) і за нові змінні взяти його дійсну і уявну частини; у випадку  $a = c = 0$  за нові змінні взяти суму і різницю (або півсуму і піврізницю) старих.

2. Поділити обидві частини рівняння на коефіцієнт при  $u_{\xi\xi}$ .

Нехай тепер  $\Delta = 0$ . Якщо при цьому  $a = 0$  або  $c = 0$ , то й  $b = 0$ , тож рівняння зводиться до канонічного вигляду діленням обох його частин на  $a + c$ . Тому далі вважаємо, що  $a \neq 0 \neq c$ . Тоді спільним значенням обох коренів рівняння (1.7) є  $\lambda = -b/a$ , рівності (1.8) набувають вигляду

$$\tilde{a} = (a\xi_x + b\xi_y)^2/a, \quad \tilde{b} = (a\xi_x + b\xi_y)(a\eta_x + b\eta_y)/a, \quad \tilde{c} = (a\eta_x + b\eta_y)^2/a, \quad (1.18)$$

а система (1.9) складається з двох однакових рівнянь

$$a\xi_x + b\xi_y = 0, \quad a\eta_x + b\eta_y = 0$$

і, таким чином, не може мати двох функціонально незалежних інтегралів. Але тепер досить і одного. А саме, з (1.18) випливає такий висновок.

Для того щоб звести до канонічного вигляду рівняння (1.1) з  $a \neq 0 \neq c$  і  $\Delta = 0$ , потрібно:

1. За змінну  $\xi$  взяти інтеграл рівняння

$$ady - bdx = 0, \quad (1.19)$$

а за змінну  $\eta$  – будь-яку диференційовну функцію  $\eta = \eta(x, y)$  таку, що  $\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \neq 0$ .

2. Поділити обидві частини рівняння на коефіцієнт при  $u_{\eta\eta}$ .

Як видно з (1.18), такий вибір  $\xi$  обнулює  $\tilde{a}$  і  $\tilde{b}$ , тож після другого кроку рівняння набуває вигляду

$$u_{\eta\eta} + \Theta = 0,$$

де  $\Theta$  – диференціальний вираз порядку не вищого за перший. Це і є канонічний вигляд рівняння параболічного типу.

**Приклад 1.1.** Підібрати нові змінні, в яких рівняння (1.1) гіперболічного типу записується в першій канонічній формі.

◁ Якщо  $a = 0 = c$ , то заміну змінних робити не потрібно.

Нехай  $a \neq 0$ . Тоді, як видно з (1.8a) і (1.8c), достатньо підпорядкувати  $\xi$  і  $\eta$  умовам

$$\xi_x - \lambda_1 \xi_y = 0, \quad \eta_x - \lambda_2 \eta_y = 0, \quad (1.20)$$

де  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  – корені рівняння (1.7) із додатним за умовою дискримінантом. Який з них вважати першим, усе одно. Нехай це буде той, де перед  $\sqrt{\Delta}$  стоїть плюс. Тоді рівняння (1.20) набувають вигляду

$$a\xi_x + (b - \sqrt{\Delta})\xi_y = 0, \quad a\eta_x + (b + \sqrt{\Delta})\eta_y = 0.$$

Отже, за  $\xi$  і  $\eta$  можна взяти інтеграли рівнянь (1.16).

Випадок  $c \neq 0$  зводиться до попереднього взаємним перепозначенням  $a$  і  $c$ ,  $x$  і  $y$ , так що за нові змінні можна взяти інтеграли рівнянь (1.17). ▷

**Приклад 1.2.** Звести до канонічного вигляду рівняння

$$y^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + 2x^2 u_{yy} + 2xu_x + yu_y = 0.$$

◁ Маємо  $a = y^2$ ,  $b = xy$ ,  $c = 2x^2$ ,  $\Delta = -x^2 y^2$ . Отже, при  $xy \neq 0$  це рівняння еліптичного типу. Перше з рівнянь (1.16) після скорочення на  $y$  набуває вигляду

$$y dy - (1 - i)x dx = 0.$$

Його інтегралом є функція  $y^2 - (1 - i)x^2$ , тож у змінних

$$\xi = y^2 - x^2, \quad \eta = x^2 \quad (1.21)$$

рівняння має канонічний вигляд (1.11b). Залишається обчислити  $\Psi$ .

За формулою диференціювання складної функції

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \quad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, \quad (1.22)$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}, \quad (1.23)$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \eta_x \xi_y) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}, \quad (1.24)$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}, \quad (1.25)$$

звідки, зважаючи на (1.21),

$$u_x = 2x(u_\eta - u_\xi), \quad u_y = 2yu_\xi,$$

$$u_{xx} = 4x^2(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) - 2u_\xi + 2u_\eta,$$

$$u_{xy} = 4xy(u_{\xi\eta} - u_{\xi\xi}),$$

$$u_{yy} = 4y^2 u_{\xi\xi} + 2u_\xi.$$

Підставивши ці вирази в рівняння і звівши подібні, дістанемо

$$4x^2 y^2 (u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}) + (2y^2 + 4x^2) u_\eta = 0,$$

або, рівносильно,

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{\xi + 3\eta}{2\eta(\xi + \eta)} u_{\eta} = 0. \triangleright$$

**Приклад 1.3.** Звести до канонічного вигляду рівняння Трікомі

$$u_{xx} - xu_{yy} = 0.$$

$\triangleleft$  Тут  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = -x$ ,  $\Delta = x$ . Отже, при  $x > 0$  рівняння належить до гіперболічного типу, а при  $x < 0$  до еліптичного. Стверджувати, що на прямій  $x = 0$  воно має параболічний тип, не можна, бо лінія не є областю.

При  $x > 0$  записуємо рівняння (1.16), які за умов прикладу мають вигляд  $dy = \pm \sqrt{x} dx$ . Інтегралами їх є функції  $3y \pm 2x^{3/2}$ . Отже, у змінних  $\xi = 3y$ ,  $\eta = 2x^{3/2}$  рівняння має канонічний вигляд (1.11a). Залишається обчислити  $\Psi$ .

Записавши  $\xi_x = 0$ ,  $\eta_y = 0$ ,  $\xi_y = 3$ ,  $\xi_{yy} = 0$ ,  $\eta_x = 3x^{1/2}$ ,  $\eta_{xx} = (3/2)x^{-1/2}$ , дістанемо з (1.23) і (1.25)

$$u_{xx} = 9xu_{\eta\eta} + (3/2)x^{-1/2}u_{\eta}, \quad u_{yy} = 9u_{\xi\xi}.$$

Підставивши ці вирази в рівняння, поділивши обидві частини на  $-9x$  і взявши до уваги, що  $(1/2)x^{-3/2} = \eta^{-1}$ , одержимо

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} - \frac{u_{\eta}}{3\eta} = 0.$$

При  $x < 0$  записуємо одне з рівнянь (1.16), (1.17), наприклад друге з чотирьох:  $dy - i\sqrt{-x}dx = 0$ . Інтегралом його є функція  $3y + 2i(-x)^{3/2}$ . Отже, у змінних  $\xi = 3y$ ,  $\eta = 2(-x)^{3/2}$  рівняння має канонічний вигляд (1.11b). Залишається обчислити  $\Psi$ .

Записавши  $\eta_x = -3(-x)^{1/2}$ ,  $\eta_{xx} = (3/2)(-x)^{-1/2}$  (решта похідних не змінюються порівняно з попереднім випадком), дістанемо з (1.22) і (1.23)

$$u_{xx} = -9xu_{\eta\eta} + (3/2)(-x)^{-1/2}u_{\eta}, \quad u_{yy} = 9u_{\xi\xi}.$$

Підставивши ці вирази в рівняння, поділивши обидві частини на  $-9x$  і врахувавши, що  $(1/2)(-x)^{-3/2} = \eta^{-1}$ , одержимо

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{u_{\eta}}{3\eta} = 0. \triangleright$$

**Приклад 1.4.** Звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx} \cos^2 x + u_{xy} \sin 2x + u_{yy} \sin^2 x + u_y = 0. \quad (1.26)$$

$\triangleleft$  Маємо  $a = \cos^2 x$ ,  $b = \sin x \cos x$ ,  $c = \sin^2 x$ ,  $\Delta = 0$ . Отже, це рівняння параболічного типу.

Запишемо рівняння (1.19):

$$\cos^2 x dy - \sin x \cos x dx = 0$$

і за змінну  $\xi$  беремо інтеграл його:  $\xi = e^y \cos x$ . Вибір  $\eta$ , як пояснено після формули (1.19), надзвичайно широкий (підходить, наприклад,  $\eta = x$  або  $\eta = y$ ), але найкраще, як буде видно з викладок, узяти  $\eta = e^y \sin x$ . Тоді

$$\begin{aligned} \xi_x &= -\eta, & \xi_y &= \xi, & \eta_x &= \xi, & \eta_y &= \eta, \\ \xi_{xx} &= -\xi, & \xi_{xy} &= -\eta, & \xi_{yy} &= \xi, & \eta_{xx} &= -\eta, & \eta_{xy} &= \xi, & \eta_{yy} &= \eta \end{aligned}$$

і рівності (1.22) – (1.25) набувають вигляду

$$\begin{aligned} u_x &= -\eta u_\xi + \xi u_\eta, & u_y &= \xi u_\xi + \eta u_\eta, \\ u_{xx} &= \eta^2 u_{\xi\xi} - 2\xi\eta u_{\xi\eta} + \xi^2 u_{\eta\eta} - \xi u_\xi - \eta u_\eta, \\ u_{xy} &= \xi\eta(u_{\eta\eta} - u_{\xi\xi}) + (\xi^2 - \eta^2)u_{\xi\eta} - \eta u_\xi + \xi u_\eta, \\ u_{yy} &= \xi^2 u_{\xi\xi} + 2\xi\eta u_{\xi\eta} + \eta^2 u_{\eta\eta} + \xi u_\xi + \eta u_\eta. \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned} &u_{xx} \cos^2 x + u_{xy} \sin 2x + u_{yy} \sin^2 x + u_y = \\ &e^{-2y} [\xi^2 u_{xx} + 2\xi\eta u_{xy} + \eta^2 u_{yy}] + u_y = \\ &e^{-2y} [(\xi^2 + \eta^2)^2 u_{\eta\eta} - \xi(\xi^2 + \eta^2)u_\xi + \eta(\xi^2 + \eta^2)u_\eta] + \xi u_\xi + \eta u_\eta = \\ &(\xi^2 + \eta^2)u_{\eta\eta} + 2\eta u_\eta, \end{aligned}$$

що перетворює (1.26) до канонічного вигляду

$$u_{\eta\eta} + \frac{2\eta}{\xi^2 + \eta^2} u_\eta = 0. \quad (1.27)$$

Відповідь написано, але в цьому прикладі можна просунутись далі і, скориставшись тим, що в канонічному вигляді рівняння містить похідні тільки по одній змінній, зінтегрувати його.

Увівши нову функцію  $v = u_\eta$ , перепишемо (1.27) у вигляді

$$v' + \frac{2\eta}{\xi^2 + \eta^2} v = 0$$

(штрих означає диференціювання по  $\eta$ ). Загальний розв'язок цього звичайного диференціального рівняння дається формулою

$$v(\xi, \eta) = \frac{f_1(\xi)}{\xi^2 + \eta^2},$$

де  $f_1$  – довільна функція. Звідси, проінтегрувавши по  $\eta$ , знаходимо за-

гальний розв'язок рівняння (1.27):

$$u(\xi, \eta) = \frac{f_1(\xi)}{\xi} \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi} + g(\xi), \quad (1.28)$$

де  $g$  – ще одна довільна функція. Якщо ми хочемо, щоб  $u$  була двічі неперервно диференційовною по  $(\xi, \eta)$ , то й від  $f_1$  і  $g$  повинні вимагати цього ж (по  $\xi$ ).

Підставивши в (1.28) вирази нових змінних через старі, одержуємо загальний розв'язок рівняння (1.26):

$$u(x, y) = x f(e^y \cos x) + g(e^y \cos x).$$

Тут  $f$  і  $g$  – довільні двічі неперервно диференційовні функції.  $\triangleright$

Класифікація рівнянь другого порядку з  $n > 2$  змінними значно складніша (див. [11, 24]). При  $n > 3$  не в кожному рівнянні можна обнулити коефіцієнти при всіх мішаних похідних. При  $n = 3$  це можна зробити, але, взагалі кажучи, неможливо досягти, щоб коефіцієнти при решті похідних були сталими. Однак лінійні по похідних рівняння

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + 2 \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + H = 0 \quad (1.29)$$

( $a_{ji} = a_{ij}$ ,  $H$  – вираз від  $\mathbf{x}$  і  $u(\mathbf{x})$ ) зі сталими коефіцієнтами допускають другорядне спрощення: за умови невинудженості матриці  $A = (a_{ij})$  можна заміною невідомої функції (а не незалежних змінних, як раніше) позбутись похідних першого порядку. Це заміна

$$u(\mathbf{x}) = e^{\alpha \mathbf{x}} v(\mathbf{x}), \quad (1.30)$$

де  $\alpha$  – сталий вектор (показник степеня – скалярний добуток). Коефіцієнтів при старших похідних вона, очевидно, не змінює. Якщо  $\alpha$  задовольняє рівняння

$$A\alpha = -b, \quad (1.31)$$

де  $b = (b_i, i = \overline{1, n})$ , то заміна (1.30) перетворює (1.29) до вигляду

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{x_i x_j} + K = 0,$$

де  $K(\mathbf{x}, v(\mathbf{x})) = e^{\alpha \mathbf{x}} H(\mathbf{x}, e^{-\alpha \mathbf{x}} v(\mathbf{x})) + \alpha b v(\mathbf{x})$ .

Якщо матриця  $A$  вироджена (при  $n = 2$  це означає параболічність рівняння (1.29)), то рівняння (1.31) або має безліч розв'язків або не має жодного. У першому випадку часом вдається обнулити лінійний по  $u$  член, якщо такий входить в  $H$  (див. приклад 9.5 нижче).

**Приклад 1.5.** Усунути похідні першого порядку в рівнянні

$$2u_{xx} - 6u_{xy} + 5u_{yy} + 2u_x - 4u_y - u = 0. \quad (1.32)$$

◁ Сума коефіцієнтів при  $u_{xy}$  і  $u_{yx}$  дорівнює  $-6$ . Вважаючи їх однаковими (тільки в такому разі матриця  $A$  буде симетричною), одержимо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Записавши рівняння (1.31) для вектора  $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  як систему

$$\begin{cases} 2\alpha - 3\beta = -1, \\ -3\alpha + 5\beta = 2 \end{cases}$$

скалярних рівнянь, знаходимо  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ . Отже, заміна  $u(x, y) = e^{x+y}v(x, y)$  перетворює рівняння (1.32) в таке:

$$2v_{xx} - 6v_{xy} + 5v_{yy} - 2v = 0. \triangleright$$

Визначити тип рівняння:

1.  $xu_{xx} - yu_{yy} = 0$ .
2.  $u_{xx} - 2u_{xy} \sin x + (2 - \cos^2 x)u_{yy} = 0$ .
3.  $y^2u_{xx} + 2yu_{xy} + u_{yy} = 0$ .

Звести до канонічного вигляду і спростити рівняння:

4.  $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_y = 0$ .
5.  $u_{xx} - 6u_{xy} + 10u_{yy} + u_x - 3u_y = 0$ .
6.  $4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} - 2u_y = 0$ .

Звести до канонічного вигляду рівняння:

7.  $xu_{xx} + 2(x+y)u_{xy} + 4yu_{yy} = 0$ .
8.  $yu_{xx} - (x+y)u_{xy} + xu_{yy} = 0$ .
9.  $e^{2y}u_{xx} - 2e^{x+y}u_{xy} + e^{2x}u_{yy} = 0$ .
10.  $(x^2 + y^2)u_{xx} + 4xyu_{xy} + (x^2 + y^2)u_{yy} = 0$ .
11.  $4y^2u_{xx} + 2(x^2 - y^2)u_{xy} - x^2u_{yy} = 0$ .
12.  $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} - 3y^2u_{yy} = 0$ .
13.  $5y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} = 0$ .
14.  $(x+y)^2u_{xx} + 2(x^2 - y^2)u_{xy} + (x-y)^2u_{yy} = 0$ .
15.  $u_{xx} \sin x + 2u_{xy} - 2u_{yy} \cos x = 0$ .

$$16. \left( \sqrt{x^2 + y^2} - x \right) u_{xx} - 2yu_{xy} + \left( \sqrt{x^2 + y^2} + x \right) u_{yy} = 0.$$

Заміною (1.30) позбавитись у рівнянні перших похідних:

$$17. u_{xx} + 5u_{yy} + 5u_{zz} + 4u_{xy} - 4u_{yz} + 6u_x - 2u_y + 4u_z + 3u = 0.$$

$$18. 2u_{xx} + 5u_{yy} + u_{zz} - 20u_{xy} - 8u_{xz} + 4u_{yz} + 2u_x + 4u_y - 2u_z - u = 0.$$

$$19. 6u_{xx} - u_{yy} + u_{zz} + 2u_{xy} + 8u_{xz} + 4u_{yz} - 2u_x + 6u_z - 3u = 0.$$

$$20. u_{xx} + 3u_{yy} - 3u_{zz} + 4u_{xy} + 4u_{xz} + 4u_{yz} + 4u_x + 2u_y + 8u_z = 0.$$

$$21. 2u_{xx} + u_{yy} - u_{zz} + 12u_{xy} - 2u_{xz} + 4u_{yz} + 2u_x + 2u_y - 4u_z - 5u = 0.$$

$$22. u_{xx} - u_{yy} - 6u_{zz} + 4u_{xy} + 4u_{xz} - 6u_{yz} + 8u_y - 2u_z + u = 0.$$

$$23. \sum_{k=1}^n k u_{x_k x_k} + 2 \sum_{k=1}^{n-1} k u_{x_k x_{k+1}} + \sum_{k=1}^n (-1)^k u_{x_k} = 0.$$

# Частина 1

## Метод відокремлення змінних

### § 2. Задача Штурма–Ліувіля

Нехай  $L$  – лінійний оператор на деякому лінійному просторі  $E$  функцій, заданих у деякій області (відкритій зв'язній множині)  $D \subset \mathbb{R}^d$ ,  $\rho$  – неперервна інтегровна додатна функція в  $D$ , звана *ваговою*. *Спектральна задача* полягає у відшукуванні всіх пар  $(\lambda, X)$ , де  $\lambda$  – число (можливо комплексне), а  $X$  – відмінна від тотожного нуля функція з  $E$  такі, що

$$LX = -\lambda\rho X. \quad (2.1)$$

(Вибір знака в правій частині не змінює постановки задачі. Для подальшого зручніший запис із мінусом). У цій рівності  $\lambda$  називається *власним числом* або *власним значенням*,  $X$  – власною функцією, а пара  $(\lambda, X)$  – *власним елементом*. Пропорційні одна одній власні функції не вважаються різними.

У спектральних задачах математичної фізики  $L$  – диференціальний оператор другого (рідше четвертого) порядку,  $E$  – деякий підпростір простору  $C^2(D)$  двічі неперервно диференційовних у  $D$  функцій, виділений за допомогою певних умов (лінійних і однорідних, раз  $E$  лінійний). Найчастіше це межові умови. Якщо межа  $\partial D$  області  $D$  кусково гладка, то *регулярна межева умова* на гладкому куску  $\Gamma$  записується так:

$$\alpha X(\mathbf{x}) + \beta \frac{\partial X}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (2.2)$$

Тут  $\partial X / \partial \mathbf{n} \equiv \mathbf{n} \cdot \nabla X$  – похідна в напрямі зовнішньої нормалі,  $\alpha$  і  $\beta$  – задані числа (свої для кожного куска), не рівні одночасно нулю. *Сингулярна межева умова* на куску  $\Gamma$  полягає в обмеженості функції та її градієнта в околі  $\Gamma$ . Коли яку накладати, залежить від виразу оператора  $L$ . Докладніше про це див. у [5].

Умову (2.2) відносять до *першого роду*, якщо  $\beta = 0$ , до *другого роду*, якщо  $\alpha = 0$ , і до *третього*, якщо  $\alpha \neq 0 \neq \beta$ .

У задачі Штурма–Ліувіля (скорочено – задача ШЛ)  $d = 1$ ,  $D = ]x_1, x_2[$  і  $L = \frac{d}{dx} \left( p \frac{d}{dx} \right) - q$ , де  $p$  – рівномірно неперервна і неперервно диференційовна додатна функція,  $q$  – неперервна невід'ємна функція. Рівняння (2.1) з таким  $L$  набуває вигляду

$$(pX')' - qX = -\lambda\rho X. \quad (2.3)$$

Інтервал  $D$  вважаємо обмеженим ( $x_1 > -\infty$ ,  $x_2 < \infty$ ), хоч можна розглядати задачі ШЛ і на необмежених інтервалах [18, 24].



Функція  $p$ , будучи рівномірно неперервною на інтервалі, однозначно продовжується до неперервної функції на його замиканні (тоді як  $q$  і  $\rho$  цієї властивості можуть і не мати), тому далі розглядаємо її як функцію на  $[x_1, x_2]$ .

Межа інтервалу складається з двох його кінців. На лівому кінці  $\partial/\partial n$  дорівнює  $-d/dx$ , а на правому  $d/dx$ , тож регулярні межові умови мають вигляд

$$\alpha_1 X(x_1) - \beta_1 X'(x_1) = 0, \quad (2.4a)$$

$$\alpha_2 X(x_2) + \beta_2 X'(x_2) = 0. \quad (2.4b)$$

Коефіцієнти  $\alpha_i, \beta_i$  в задачі ШЛ невід'ємні.

Спектральну задачу на  $]x_1, x_2[$  з рівнянням (2.3) називають задачею ШЛ в наступних п'ятьох випадках.

1. *Регулярна задача ШЛ*:  $p(x_1) > 0, p(x_2) > 0, q$  рівномірно неперервна. Межові умови – (2.4). Вимогу до  $q$  можна, як пояснено після формули (2.3), записати ще так:  $q \in C[x_1, x_2]$ .

2. *Сингулярна на лівому кінці задача ШЛ*:  $p(x_2) > 0$ ,

$$p(x_1) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_1+0} \frac{p(x)}{x - x_1} > 0, \quad (2.5)$$

$$(x - x_1)q \in C[x_1, x_2]. \quad (2.6)$$

На правому кінці накладається регулярна умова (2.4b), на лівому – сингулярна умова

$$X \in C^1[x_1, x_2]. \quad (2.7)$$

Звичайно, умова (2.7) є межевою на обох кінцях. Але на правому вона нічого не додає до (2.4b).

3. *Сингулярна на правому кінці задача ШЛ*:  $p(x_1) > 0$ ,

$$p(x_2) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_2-0} \frac{p(x)}{x_2 - x} > 0, \quad (2.8)$$

$$(x_2 - x)q \in C[x_1, x_2]. \quad (2.9)$$

На лівому кінці накладається умова (2.4a), на правому – (2.7).

4. *Двічі сингулярна задача ШЛ*: (2.5), (2.6), (2.8), (2.9). Спільна для обох кінців сингулярна умова (2.7).

5. *Задача ШЛ з умовами періодичності* відрізняється від регулярної тим, що замість (2.4) накладаються нерозщеплені межові умови

$$X(x_1) = X(x_2), \quad (2.10a)$$

$$X'(x_1) = X'(x_2), \quad (2.10b)$$

смысл яких полягає в існуванні  $(x_2 - x_1)$ -періодичного продовження функції  $X$  на всю числову пряму. Аналогічні умови повинні задовольняти й  $p$ .

Нагадаємо, що простір  $L_2(D, \rho)$  квадратично інтегровних з вагою  $\rho$  функцій (можливо комплекснозначних) на  $D$  евклідові зі скалярним добутком  $(f, g) = \int_D f(x)g(x)\rho(x)dx$  (риска означає комплексне спряження), відтак і нормований  $(\|f\| = \sqrt{(f, f)})$ .

**Властивості власних елементів задачі ШЛ**

1°. Власні значення дійсні невід’ємні.

2°. Власні значення утворюють зліченну множину. Будь-який скінченний відрізок числової прямої містить тільки скінченне число власних значень.

Ці дві властивості означають, що власні числа можна занумерувати за зростанням:  $\lambda_{n_0} < \lambda_{n_0+1} < \dots$  (за  $n_0$  зручно брати 1 або 0) і при цьому  $\lambda_{n_0} \geq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ .

3°. Відповідаючи різним власним значенням власні функції ортогональні з вагою  $\rho$  (тобто як елементи простору  $L_2([x_1, x_2], \rho)$ ).

4°. У задачах ШЛ перших чотирьох видів кожному власному значенню відповідає рівно одна власна функція.

5°. **Теорема повноти.** Кожна функція  $\varphi \in L_2([x_1, x_2], \rho)$  розкладається в збіжний у середньому квадратичному ряд Фур’є по власних функціях задачі ШЛ:

$$\varphi = \sum_{n=n_0}^{\infty} \varphi_n X_n, \quad (2.11)$$

де

$$\varphi_n = \frac{(\varphi, X_n)}{\|X_n\|^2}. \quad (2.12)$$

Теорема повноти стверджує збіжність ряду за нормою простору  $L_2$ . Поточкова збіжність звідси не випливає. Тому особливу цінність становить наступна властивість.

6°. **Теорема Стеклова.** Нехай  $\varphi \in C^1[x_1, x_2]$ ,  $\varphi'$  кусково неперервно диференційовна і  $\varphi$  задовольняє межові умови задачі ШЛ, причому якщо задача сингулярна на кінці  $x_j$  і  $\lim_{x \rightarrow x_j} (x - x_j)q(x_j) \neq 0$ , то  $\varphi(x_j) = 0$ . Тоді ряд Фур’є функції  $\varphi$  по власних функціях задачі збігається до неї рівномірно.

З огляду на першу властивість позначення власного числа часом замінюють на  $\nu^2$ , що робитимемо й ми, коли це буде доцільно.

Шукаючи загальний розв’язок рівняння (2.3), випадок  $\nu = 0$  як правило доводиться розглядати окремо. Тому корисно виділити клас задач ШЛ, для яких число  $\nu = 0$  напевно не є власним.

**Лема.** Якщо в регулярній задачі ШЛ хоча б одна з межових умов (2.4) не другого роду, то нуль не є власним значенням задачі.

**Приклад 2.1**

$$\begin{cases} X'' + \nu^2 X = 0, \\ X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \end{cases}$$

◁ Тут  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = l$ ,  $p = \rho = 1$ ,  $q = 0$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ .

Згідно з лемою число 0 не є власним. При  $\nu > 0$  загальний розв’язок рівняння дається формулою

$$X(x) = A \cos \nu x + B \sin \nu x. \quad (2.13)$$

З межових умов дістаємо  $A = 0$  і  $B \sin \nu l = 0$ . Оскільки нас цікавлять ненульові розв’язки, то  $B \neq 0$ , звідки  $\sin \nu l = 0$ . Розв’язавши це рівняння відносно  $\nu > 0$  і поклавши  $B = 1$ , одержимо відповідь:

$$\nu_n = \frac{\pi n}{l}, \quad X_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad n \in \mathbb{N}. \triangleright$$

## Приклад 2.2

$$\left\{ \begin{array}{l} X'' + \nu^2 X = 0, \\ X'(0) - hX(0) = 0, \quad X'(l) + hX(l) = 0 \end{array} \right.$$

( $h$  – додатний числовий параметр).

◁ Підставивши загальний розв’язок (2.13) рівняння з  $\nu > 0$  в межові умови, дістанемо

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu B - hA = 0, \\ A(h \cos \nu l - \nu \sin \nu l) + B(\nu \cos \nu l + h \sin \nu l) = 0. \end{array} \right.$$

З першого рівняння маємо  $B = hA/\nu$ . Підставивши цей вираз у друге рівняння і скоротивши на  $A$  ( $A \neq 0$ , бо інакше  $B = 0$ ,  $X = 0$ ), одержимо

$$2h \cos \nu l + (h^2/\nu - \nu) \sin \nu l = 0.$$

Позначивши  $g(\nu) = (\nu/h - h/\nu)/2$ , перепишемо останню рівність у вигляді

$$\operatorname{ctg} \nu l = g(\nu). \quad (2.14)$$

Функція  $g$  зростає, як різниця зростаючої і спадної, має вертикальну асимптоту  $\nu = 0$  і похилу асимптоту  $y = \nu/2h$ . Отже, рівняння (2.14) має нескінченну множину  $\{\nu_n, n \in \mathbb{N}\}$  додатних коренів, причому

$$\pi(n-1)/l < \nu_n < \pi n/l.$$

Числа  $\nu_n^2$  є власними в цій задачі. А власні функції даються формулою (2.13) з  $\nu = \nu_n$  і довільними  $A \neq 0$ ,  $B = hA/\nu_n$ . Найзручніше вибрати  $A = \nu_n$ . Тоді

$$X_n(x) = \nu_n \cos \nu_n x + h \sin \nu_n x. \triangleright \quad (2.15)$$

## Приклад 2.3

$$\left\{ \begin{array}{l} X'' + \nu^2 X = 0, \\ X(0) = X(2\pi), \quad X'(0) = X'(2\pi). \end{array} \right.$$

◁ Очевидно,  $\nu_0 = 0$  – власне значення і  $X_0 = 1$  – власна функція. При  $\nu > 0$  підстановка виразу (2.13) у межові умови дає систему рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} A = A \cos 2\pi\nu + B \sin 2\pi\nu, \\ B = -A \sin 2\pi\nu + B \cos 2\pi\nu \end{array} \right.$$

відносно  $A$  і  $B$ . Оскільки ми шукаємо ненульові розв’язки, то повинні прирівняти її визначник до нуля. Це дає рівняння

$$(1 - \cos 2\pi\nu)^2 + \sin^2 2\pi\nu = 0,$$

або, рівносильно  $\cos 2\pi\nu = 1$ . Отже, всі натуральні числа також є власними і кожному  $n \in \mathbb{N}$  відповідають дві власні функції:  $\cos nx$  і  $\sin nx$ .

▷

**Приклад 2.4**

$$(1 - x^2)X'' - 2xX' = -\lambda X, \quad (2.16)$$

$$X \in C^1[-1, 1]. \quad (2.17)$$

◁ Це двічі сингулярна задача ШЛ з  $p(x) = 1 - x^2$ ,  $q = 0$ ,  $\rho = 1$ . Шукаємо розв'язок рівняння (2.16) у вигляді степеневого ряду:  $X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ . В інтервалі збіжності степеневий ряд можна почленно диференціювати, тому

$$X'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}x^n, \quad X''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2}x^n,$$

$$xX'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n, \quad x^2 X''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^n.$$

Підставивши ці вирази у (2.16) і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях, одержуємо рекурентне співвідношення

$$c_{n+2} = \frac{n(n+1) - \lambda}{(n+1)(n+2)} c_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.18)$$

Щоб обчислювати за ним, потрібно задати  $c_0, c_1$  (це і є довільні сталі, що входять у загальний розв'язок), причому якщо один із цих коефіцієнтів покладемо рівним нулю, то інший повинен бути ненульовим. Розглянемо два випадки.

(а)  $c_1 = 0 \neq c_0$ . Тоді з формули (2.18) випливає, що для будь-якого  $k \in \mathbb{Z}_+$   $c_{2k+1} = 0$ ,  $c_{2k+2} = \frac{2k(2k+1) - \lambda}{(2k+1)(2k+2)} c_{2k}$ . Звідси видно, що при  $\lambda = 2j(2j+1)$  буде  $c_{2k+2} = 0$ , як тільки  $k \geq j$ , і  $c_{2k} \neq 0$  при  $k \leq j$ , тобто  $X$  буде поліномом степеня  $2j$ . Очевидно, він задовольняє умову (2.17). Отже, числа  $\lambda_{2j} = 2j(2j+1)$ ,  $j \in \mathbb{Z}_+$ , є власними і відповідають їм власні функції

$$X_{2j}(x) = \sum_{k=0}^j c_{2k} x^{2k}. \quad (2.19)$$

(б)  $c_0 = 0 \neq c_1$ . Тоді з формули (2.18) випливає, що для будь-якого  $k \in \mathbb{N}$   $c_{2k} = 0$ ,  $c_{2k+1} = \frac{2k(2k-1) - \lambda}{2k(2k+1)} c_{2k-1}$ . Міркуючи аналогічно випадкові (а), переконуємося, що числа  $\lambda_{2j-1} = 2j(2j-1)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , є власними і відповідають їм власні функції

$$X_{2j-1}(x) = \sum_{k=0}^j c_{2k+1} x^{2k+1}. \quad (2.20)$$

Об'єднавши випадки (а) і (б), одержуємо таку систему власних еле-

ментів задачі ШЛ:

$$\lambda_n = n(n+1), \quad X_n — \text{поліном } n\text{-го степеня, } n \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.21)$$

Покажемо, що інших власних функцій немає.

Оскільки множина скінченних лінійних комбінацій функцій  $X_n$  містить, очевидно, всі поліноми, то за теоремою Вейерштраса вона щільна в  $C[-1, 1]$ , а значить і в  $L_2[-1, 1]$ . Отже, єдиний елемент простору  $L_2[-1, 1]$ , ортогональний усім  $X_n$ , є нульова функція. Водночас, за властивостями 3° і 4° задачі ШЛ, кожна власна функція ортогональна решті власних функцій. Тому власних функцій, відмінних від знайдених, не існує і, таким чином, формули (2.19) – (2.21) дають розв’язок задачі. Доповнимо розв’язання таким коментарем.

Нагадаємо, що власні функції визначаються з точністю до сталого множника. У нашому випадку це рівносильно заданню тієї з двох констант  $c_0, c_1$ , яка відмінна від нуля. Загальноприйнятим є такий вибір константи, при якому в точці 1 власна функція набирає значення 1. Підпорядковані цій додатковій вимозі власні функції називаються *поліномами Лежандра* і позначаються  $P_n$ . Таким чином,  $P_n$  — єдиний розв’язок лінійної диференціальної задачі

$$\begin{aligned} (1-x^2)X'' - 2xX' + n(n+1)X &= 0, \\ |X(-1+0)| < \infty, \quad X(1) &= 1. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Як показано вище, це поліном  $n$ -го степеня. Його можна записати і в “явному” вигляді [16, 18, 24]:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \triangleright \quad (2.23)$$

## Приклад 2.5

$$(1-x^2)X'' - 2(m+1)xX' + (\lambda - m(m+1))X = 0 \quad (2.24)$$

( $m$  — невід’ємний цілочисловий параметр),  $X$  задовольняє умову (2.17).

◁ Помноживши обидві частини рівняння на  $(1-x^2)^m$ , перетворюємо його до вигляду (2.3) з  $p(x) = (1-x^2)^{m+1}$ ,  $q(x) = m(m+1)(1-x^2)^m$ ,  $\rho(x) = (1-x^2)^m$ . Щоб підкреслити залежність власних елементів від параметра, писатимемо його в позначеннях другим індексом.

При  $m = 0$  маємо розв’язану в попередньому прикладі задачу. При  $m > 0$  задача не є задачею ШЛ (бо  $\lim_{x \rightarrow \pm 1} \frac{p(x)}{x \mp 1} = 0$ ), але цей випадок зводиться до вже розібраного. А саме, продиференціювавши  $m \leq n$  разів рівність (2.22) з  $X = P_n$ , дістанемо

$$(1-x^2)P_n^{(m+2)} - 2(m+1)xP_n^{(m+1)} + (n(n+1) - m(m+1))P_n^{(m)} = 0.$$

Таким чином, при  $n \geq m$  функція  $P_n^{(m)}$  задовольняє рівняння (2.24) і, будучи поліномом, умову (2.17). Отже, для кожного  $m \in \mathbb{Z}_+$  серед

власних елементів задачі є такі:

$$\lambda_{nm} = n(n+1), \quad X_{nm} = P_n^{(m)}, \quad n = m, m+1, \dots \quad (2.25)$$

Покажемо, що інших власних елементів немає.

Оскільки при кожному  $m$  серед знайдених власних функцій є поліноми всіх степенів, то множина скінченних лінійних комбінацій їх щільна в  $C[-1, 1]$ , а значить і в  $L_2([-1, 1], \rho)$ . Отже, побудована система власних функцій повна: єдиний елемент простору  $L_2$ , ортогональний усім  $P_n^{(m)}$ ,  $n \geq m$ , – нульова функція. Залишається показати, що *будь-які дві різні* (тобто не пропорційні одна одній) *власні функції ортогональні*.

Для цього насамперед запишемо для довільних функцій  $u, v \in C[-1, 1]$  формули інтегрування частинами

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (pu')' v' dx &= (pu'v) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 pu'v' dx, \\ \int_{-1}^1 pu'v' dx &= (puv') \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 u(pv')' dx, \end{aligned}$$

із яких з урахуванням рівностей  $p(\pm 1) = 0$ , одержуємо

$$\int_{-1}^1 vLudx = \int_{-1}^1 uLvdx. \quad (2.26)$$

Нехай  $X_1$  і  $X_2$  – власні функції задачі (2.24) & (2.17), відповідаючі власним значенням  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$ . Тоді

$$\lambda_1 \int_{-1}^1 X_1 X_2 \rho dx = - \int_{-1}^1 X_2 L X_1 dx \stackrel{(2.26)}{=} - \int_{-1}^1 X_1 L X_2 dx = \lambda_2 \int_{-1}^1 X_1 X_2 \rho dx,$$

що доводить наше твердження у випадку  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Одному ж власному значенню не можуть відповідати дві власні функції. Справді, за формулою Остроградського–Ліувіля для будь-яких розв'язків  $X$  і  $Y$  рівняння (2.24) на  $]-1, 1[$  функція  $(XY' - X'Y)p$  стала на цьому інтервалі. Якщо ж і  $X$  і  $Y$  належать  $C^1[-1, 1]$ , то вона має те саме значення і на кінцях інтервалу. Але на кінцях  $p = 0$ , тоді як у внутрішніх точках  $p > 0$ . Тому  $XY' - X'Y$  є тотожний нуль на  $[-1, 1]$ , що означає пропорційність функцій  $X$  і  $Y$ .

Із доведеного твердження і встановленої вище повноти системи функцій  $\{P_n^{(m)}, m \geq n\}$  випливає, що власних елементів, відмінних від знайдених, не існує і, таким чином, рівності (2.25) дають відповідь.  $\triangleright$

Розв'язати регулярну задачу ШЛ:

$$1. \begin{cases} X'' + \nu^2 X = 0, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} X'' + \nu^2 X = 0, \\ X(0) = X'(l) = 0. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} X'' + \nu^2 X = 0, \\ X'(0) = X(l) = 0. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} X'' + \nu^2 X = 0, \\ X'(0) = X'(l) = 0. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} X'' + \nu^2 X = 0, \\ X'(a) = X'(b) = 0. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} X'' + \nu^2 X = 0, \\ X(-a) = X(a) = 0. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} X'' + \nu^2 X = 0, \\ X(0) = 0, \\ X'(l) + hX(l) = 0, \quad h > 0. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} X'' + \nu^2 X = 0, \\ X'(0) - hX(0) = 0, \quad h > 0, \\ X'(l) = 0. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} X'' + X' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(\pi) = 0. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} X'' - 2X' + \lambda X = 0, \\ X'(0) - X(0) = 0, \quad h > 0, \\ X'(1) + X(1) = 0. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x^2 X'' + xX' + \nu^2 X = 0, \\ X(1) = X'(e) = 0. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x^2 X'' + xX' + \nu^2 X = 0, \\ X(1/a) = X(a) = 0, \quad a > 1. \end{cases}$$

13. Розв'язати залежну від додатного параметра  $h$  спектральну задачу

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = 0, \quad X'(l) - hX(l) = 0. \end{cases}$$

Розв'язати залежну від параметрів сингулярну задачу ШЛ (власне значення скрізь позначається  $\lambda$ ):

$$14. (1 - x^2)X'' - (\alpha x + \beta)X' + \lambda X = 0, \quad x \in [-1, 1].$$

$$15. (1 - x^2)X'' - 2xX' + [\lambda - \mu^2/(1 - x^2)]X = 0, \quad x \in [a, 1], \quad X(a) = 0.$$

$$16. (1 - x^2)X'' - 2xX' + [\lambda - \mu^2/(1 - x^2)]X = 0, \quad x \in [-1, 1].$$

$$17. (1 - x^2)X'' - 2(a + 1)xX' + [\lambda - m(m + 2a)/(1 - x^2)]X = 0, \\ x \in [-1, 1], \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad a > -1/2.$$

Розв'язати спектральну задачу в необмеженій області (на нескінченності накладається умова обмеженості власної функції):

$$18. xX'' + (a + 1 - x)X' + \lambda X = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

$$19. X'' - 2xX' + 2\lambda X = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$21. \begin{cases} X'' + (\lambda - x^2)X = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+, \\ X'(0) = 0. \end{cases}$$

$$20. X'' + (\lambda - x^2)X = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$22. X'' + (\lambda + \operatorname{ch}^{-2} x)X = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

### § 3. Крайові задачі для рівнянь параболічного і гіперболічного типів на відрізку

Регулярна крайова задача на відрізку ставиться так:

$$\rho Mu = a^2 Lu + F, \quad x_1 < x < x_2, \quad t > 0, \quad (3.1)$$

$$\alpha_1 u(x_1, t) - \beta_1 u_x(x_1, t) = \chi_1(t), \quad t > 0, \quad (3.2a)$$

$$\alpha_2 u(x_2, t) + \beta_2 u_x(x_2, t) = \chi_2(t), \quad t > 0, \quad (3.2b)$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x, 0) = \varphi_k(x), \quad k = \overline{0, m-1}, \quad x_1 < x < x_2. \quad (3.3)$$

У постановку входять також деякі вимоги до функції  $u$ , які ми сформулюємо після пояснення позначень.

У написаних співвідношеннях

$$M = \sum_{i=0}^m b_{m-i} \frac{\partial^i}{\partial t^i}$$

( $b_0, \dots, b_m$  – неперервні функції від  $t$ , перша з яких додатна);

$$L = \frac{\partial}{\partial x} \left( p \frac{\partial}{\partial x} \right) - q,$$

$\rho, \alpha_i, \beta_i$  (а також  $p$  і  $q$  у виразі оператора  $L$ ) такі, як у регулярній задачі ШЛ;  $F$  – неперервна функція від  $x$  і  $t$  така, що для будь-якого  $t$

$$\int_{x_1}^{x_2} |F(x, t)| dx < \infty; \quad (3.4)$$

$a^2$  – неперервна додатна функція від  $t$ ;  $\chi_1, \chi_2, \varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}$  – кусково гладкі (порядок гладкості в загальній постановці не уточнюємо) функції написаних вище змінних.

Функція  $u$  повинна задовольняти певні вимоги гладкості (для  $m \leq 2$  див. [6, 12, 16, 24]), а також умову неперервного прилягання (притику) до межі. Останнє означає таке: 1) якщо  $t_0$  – точка неперервності функції  $\chi_j$ , то функція  $\alpha_j u + (-1)^j \beta_j u_x$  неперервна по  $(x, t)$  в околі точки  $(x_j, t_0)$ ; 2) якщо  $x_0$  – точка неперервності  $\varphi_k$ , то  $\partial^k u / \partial t^k$  неперервна по  $(x, t)$  в околі точки  $(x_0, 0)$ .

Разом межові умови (3.2) і початкові умови (3.3) називаються *крайовими*.

Багато крайових задач, і серед них (3.1) – (3.3), розв'язуються *методом відокремлення змінних* (МВЗ), який зводить крайову задачу в частинних похідних до серії лінійних диференціальних задач (у даному разі – задач Коші) у звичайних похідних.

Нехай спочатку  $\chi_1 = \chi_2 = 0$ . Тоді за теоремою Стеклова розв'язок задачі, якщо він існує, при кожному  $t$  розкладається в ряд Фур'є по власних функціях задачі ШЛ (2.3) & (2.4), коефіцієнти якого, природно, теж залежать від  $t$ :

$$u(x, t) = \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n(t) X_n(x). \quad (3.5)$$



По них же розкладаються за теоремою повноти  $F(\cdot, t)/\rho$  і  $\varphi_k$ :

$$F(\cdot, t) = \rho \sum_{n=n_0}^{\infty} f_n(t) X_n, \quad (3.6)$$

$$\varphi_k = \sum_{n=n_0}^{\infty} \varphi_{kn} X_n \quad (3.7)$$

(аргумент  $x$  у цих рівностях не пишемо, бо в них на відміну від (3.5) ряди не зобов'язані збігатися при кожному  $x$ ). Припустимо, що оператори  $M$  і  $L$  можна застосовувати до ряду (3.5) почленно (якби сума була скінченною, то це впливало би просто з лінійності їх). Тоді, підставивши розклади (3.5) – (3.7) у рівності (3.1), (3.3) (а (3.2) справджуються за вибором  $X_n$ ) і прирівнявши коефіцієнти при однакових власних функціях зліва і справа (див. деталі у [27, с. 16–17]), дістанемо при кожному  $n$  задачу Коші для  $u_n$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} Mu_n = -a^2 \lambda_n u_n + f_n, \\ u_n^{(k)}(0) = \varphi_{kn}, \quad k = \overline{0, m-1}, \end{array} \right. \quad (3.8)$$

де  $\lambda_n$  – власне число, якому відповідає  $X_n$ . Це приводить до такого **алгоритму** МВЗ для задачі (3.1) – (3.3) з однорідними межевими умовами.

**КРОК 1.** Знаходимо власні числа  $\lambda_n$  і власні функції  $X_n$  ( $n = n_0, n_0+1, \dots$ ) задачі ШЛ (2.3) & (2.4).

**КРОК 2.** Записуємо розклади (3.6) і (3.7).

Коефіцієнти розкладів обчислюються за формулою (2.12):

$$f_n(t) = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_{x_1}^{x_2} F(x, t) X_n(x) dx, \quad (3.9)$$

$$\varphi_{kn} = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_{x_1}^{x_2} \varphi_k(x) X_n(x) \rho(x) dx, \quad (3.10)$$

де, нагадаємо

$$\|X_n\|^2 = \int_{x_1}^{x_2} X_n(x)^2 \rho(x) dx. \quad (3.11)$$

Існування першого інтеграла впливає з (3.4), другого – з кускової неперервності  $\varphi_k$ . Відсутність  $\rho(x)$  у (3.9) пояснюється тим, що в підінтегральному виразі вона фігурує як множник і як дільник (бо в (3.6) розкладається не  $F$ , а  $F/\rho$ ).

Не поспішаймо виконувати інтегрування! По-перше, на наступному кроці можна оперувати з  $f_n$  і  $\varphi_{kn}$  просто як із символами. По-друге, якщо якась функція є лінійною комбінацією базисних, то ця комбінація і є шуканим розкладом.

**КРОК 3.** Для кожного  $n$  розв'язуємо задачу Коші (3.8).

Вище ми припустили, що ряд (3.5) можна почленно диференціювати стільки разів, скільки вимагає метод. Тепер, коли функції  $u_n$  знайдено, це

можна перевірити. Як тільки це буде зроблено, формальний розв'язок (3.5) стане справжнім. Отже, потрібен

КРОК 4. Показуємо, що при всіх  $x$  і  $t$  ряд у (3.5) збігається і

$$\begin{aligned}\frac{\partial^j}{\partial x^j} \sum u_n(t) X_n(x) &= \sum u_n(t) X_n^{(j)}(x), \quad j = 1, 2, \\ \frac{\partial^k}{\partial t^k} \sum u_n(t) X_n(x) &= \sum u_n^{(k)}(t) X_n(x), \quad k = \overline{0, m-1}.\end{aligned}$$

Виконання останнього кроку потребує додаткових припущень про функції  $F, \varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}$  і громіздких викладок (див. [23, с. 547–552], [27, с. 29–34]). Тому в прикладах нижче ми обмежуємось побудовою формального розв'язку. Для цього є й істотніша причина: теорія узагальнених функцій розширює поняття розв'язку крайової задачі і послаблює вимоги до збіжності ряду, яким той зображується.

Щоб полегшити читачеві користування алгоритмом, відтворимо елементарні навідні міркування Фур'є, які привели його до відкриття методу.

Шукаємо частинні розв'язки *однорідного* ( $F = 0$ ) рівняння (3.1) у вигляді

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (3.12)$$

Підстановка цього виразу в рівняння перетворює його до вигляду

$$\rho XMT = a^2 T \mathbf{L} X.$$

Поділивши обидві частини на  $a^2 \rho T X$ , одержимо рівність

$$\frac{MT}{a^2 T} = \frac{\mathbf{L} X}{\rho X},$$

ліва частина якої є функція від  $t$ , а права – від  $x$ . Тому обидві вони дорівнюють якомусь числу  $-\lambda$ . Це означає, що  $X$  задовольняє рівняння (2.3), а  $T$  – рівняння  $MT = -a^2 \lambda T$ , те саме, що в задачі Коші (3.8). Далі, підстановка виразу (3.12) в *однорідні* умови (3.2) дає для  $X$  межові умови (2.4). Таким чином, *ненульова функція виду (3.12) може бути розв'язком однорідної задачі (3.1) & (3.2) тільки тоді, коли  $X$  – власна функція задачі ШЛ (2.3) & (2.4)*. З огляду на однорідність задачі сума розв'язків виду (3.12) сама є розв'язком. Тому можна спробувати побудувати послідовність  $(X_n T_n)$  розв'язків таку, щоб сума їх задовольняла початкові умови (3.2). Для цього треба за початкові значення  $T_n(0), \dot{T}_n(0), \dots, T_n^{(m-1)}(0)$  взяти коефіцієнти при  $X_n$  в розкладах функцій  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}$  відповідно по базису  $(X_n)$ .

Кустарність описаного прийому<sup>1</sup> для одних – недолік, для інших – достоїнство. Але безперечним мінусом є те, що доводиться починати з розгляду однорідного рівняння, навіть якщо в задачі воно неоднорідне.

Важливою рисою МВЗ є нечутливість до типу рівняння (3.1). При  $m = 0$  воно є звичайним (умови (3.3) в цьому випадку відсутні, а  $t$  відіграє роль параметра), при  $m = 1$  належить до параболічного типу, при  $m = 2$  – до гіперболічного, а при більших  $m$  не підпадає під класифікацію § 1, бо має вищий ніж 2 порядок. Але алгоритм у всіх випадках однаковий!

<sup>1</sup>Це все одно що, розв'язуючи систему  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$  звичайних диференціальних рівнянь, підставляти в неї гаданий розв'язок  $\mathbf{x}(t) = T(t)\mathbf{b}$ , де  $\mathbf{b}$  – сталий вектор.

Нехай тепер межові умови (3.2) неоднорідні. Шукаємо розв'язок задачі у вигляді

$$u = v + w, \quad (3.13)$$

підпорядкувавши функцію  $w$  умовам

$$\alpha_1 w(x_1, t) - \beta_1 w_x(x_1, t) = \chi_1(t), \quad (3.14a)$$

$$\alpha_2 w(x_2, t) + \beta_2 w_x(x_2, t) = \chi_2(t), \quad (3.14b)$$

і таким самим, як для  $u$ , вимогам гладкості і неперервного прилягання до межі. Тоді функція  $v$  буде розв'язком задачі

$$\left\{ \begin{aligned} \rho M v &= a^2 L v + F + a^2 L w - \rho M w, \\ \alpha_1 v(x_1, t) - \beta_1 v_x(x_1, t) &= 0, \quad \alpha_2 v(x_2, t) + \beta_2 v_x(x_2, t) = 0, \\ \frac{\partial^k v}{\partial t^k}(x, 0) &= \varphi_k(x) - \frac{\partial^k w}{\partial t^k}(x, 0), \quad k = \overline{0, m-1}, \end{aligned} \right. \quad (3.15)$$

до якої вже можна застосовувати алгоритм.

Умови (3.14) визначають  $w$ , відтак і  $v$ , неоднозначно. Але якщо для задачі (3.1) – (3.3) встановлено єдиність розв'язку, для чого можна скористатись відомими теоремами [6, 11, 12, 16, 24], то права частина (3.13) від цієї неоднозначності не залежить.

Якщо хоча б одна з межових умов (3.2) не другого роду, то функцію  $w$  можна підібрати у вигляді

$$w(x, t) = R(t) + Q(t)x. \quad (3.16)$$

Якщо ж обидві умови другого роду, то  $w$  можна підібрати у вигляді

$$w(x, t) = Q(t)x + P(t)x^2. \quad (3.17)$$

В останньому випадку часом буває зручно дописати до правої частини рівності доданок  $R(t)$ . При підстановці в умови другого роду він зникає, але іноді спрощує вираз  $w$  або задачу для  $v$ .

Підставивши (3.16) у (3.14), дістанемо систему лінійних алгебричних<sup>2</sup> рівнянь відносно  $R(t)$  і  $Q(t)$ . Але якщо  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  (на обох кінцях умови першого роду), то виписувати її немає потреби. Можна скористатись інтерполяційною формулою Лагранжа

$$w(x, t) = \frac{x_2 - x}{l} \chi_1(t) + \frac{x - x_1}{l} \chi_2(t),$$

де  $l = x_2 - x_1$ . Так само при  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  можна записати інтерполяційну формулу для  $w_x$ . Проінтегрувавши її по  $x$ , одержимо

$$w(x, t) = \frac{(x - x_1)^2}{2l} \chi_2(t) - \frac{(x_2 - x)^2}{2l} \chi_1(t). \quad (3.18)$$

Це якраз той випадок, про який ішлося вище ( $R = -x_2^2 \chi_1 / 2l$ ).

---

<sup>2</sup>Написання цього слова подаємо за академічним Словником української мови (Наукова думка, 1970–80). Воно логічніше за *алгебраїчний* (пор. *сатиричний*, *метафоричний*) і було загальноприйнятим в україномовній навчальній і науковій літературі першої половини минулого століття.

Скрізь нижче  $a^2$  – стала. У тих задачах, де  $\rho = 1$ , позначення  $F$  замінюємо на  $f$ . При  $m \leq 2$  замість  $\varphi_0$  і  $\varphi_1$  пишемо  $\varphi$  і  $\psi$ , відповідно. Коефіцієнти Фур'є цих функцій записуємо з одним індексом – тим, який раніше писали другим, так що в прикладах  $\varphi_n$  і  $\psi_n$  числа, а не функції.

### Приклад 3.1

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = a^2 u_{xx} + t, \\ u_x(0, t) - hu(0, t) = 0, \\ u_x(l, t) + hu(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = 1. \end{array} \right.$$

◁ Тут  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = l$ ,  $M = \partial/\partial t$ ,  $m = 1$ ,  $p = \rho = 1$ ,  $q = 0$ ,  $a^2 = \text{const}$ ,  $F(x, t) = t$ ,  $\varphi(x) = 1$ ,  $\alpha_i = h$ ,  $\beta_i = 1$ . Межові умови однорідні, тому можна відразу приступати до виконання алгоритму.

1. Записуємо задачу ШЛ:

$$\left\{ \begin{array}{l} X'' = -\nu^2 X, \\ X'(0) - hX(0) = 0, \quad X'(l) + hX(l) = 0. \end{array} \right.$$

Її власні елементи знайдено в прикладі 2.2:

$$X_n(x) = \nu_n \cos \nu_n x + h \sin \nu_n x, \quad (3.19)$$

$\nu_n$  –  $n$ -й у порядку зростання корінь рівняння

$$\text{ctg } \nu l = g(\nu), \quad (3.20)$$

де

$$g(\nu) = \frac{\nu^2 - h^2}{2h\nu}. \quad (3.21)$$

2. Оскільки  $F(x, t) = t\varphi(x)$ , то

$$f_n(t) = t\varphi_n. \quad (3.22)$$

За формулою (2.12) і з урахуванням умов задачі

$$\varphi_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l X_n(x) dx. \quad (3.23)$$

Щоб обчислити множник перед інтегралом, запишемо на підставі (3.19)

$$X_n(x)^2 = \frac{\nu^2 + h^2}{2} + \nu h \sin 2\nu x + \frac{\nu^2 - h^2}{2} \cos 2\nu x \quad (3.24)$$

( $\nu$  означає  $\nu_n$ ). Проінтегрувавши цю рівність від 0 до  $l$ , дістанемо з урахуванням (3.21)

$$\|X_n\|^2 = \frac{\nu^2 + h^2}{2} l + \frac{h}{2} [1 - \cos 2\nu l + g(\nu) \sin 2\nu l]. \quad (3.25)$$

Із відомих формул

$$\cos 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}, \quad \sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}$$

і (3.20) маємо

$$1 - \cos 2\nu l = \frac{2}{g(\nu)^2 + 1}, \quad \sin 2\nu l = \frac{2g(\nu)}{g(\nu)^2 + 1},$$

що перетворює (3.25) до вигляду

$$\|X_n\|^2 = \frac{(\nu_n^2 + h^2)l}{2} + h. \quad (3.26)$$

Зважаючи на (3.19)

$$\int_0^l X_n(x) dx = \sin \nu_n l + h\nu_n^{-1}(1 - \cos 2\nu_n l), \quad (3.27)$$

що разом із (3.23) і (3.26) дає явний вираз  $\varphi_n$ .

**3.** Записуємо з урахуванням (3.22) задачу Коші (3.8):

$$\begin{cases} \dot{u}_n = -a^2 \nu_n^2 u_n + t \varphi_n, \\ u_n(0) = \varphi_n. \end{cases}$$

Розв'язок її дається, очевидно, формулою

$$u_n(t) = \varphi_n \left[ e^{-a^2 \nu_n^2 t} - 1 + a^2 \nu_n^2 \right] / (a \nu_n)^4.$$

Ця рівність разом із (3.23), (3.26), (3.27), (3.19) і даним вище означенням чисел  $\nu_n$  перетворює формулу (3.5), у якій треба покласти  $n_0 = 1$ , на відповідь.  $\triangleright$

### Приклад 3.2

$$\begin{cases} u_t + \frac{u}{2(t+1)} = a^2 u_{xx} + 2\sqrt{t+1} \sin^2 \frac{\pi x}{2l}, \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = 2 \cos^2 \frac{\pi x}{2l}. \end{cases}$$

$\triangleleft$  Тут  $m = 1$ ,  $M = \partial/\partial t - (2(t+1))^{-1}$ ,  $p = 1$ ,  $q = 0$ ,  $\rho = 1$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ,

$$f(x, t) = 2\sqrt{t+1} \sin^2 \frac{\pi x}{2l}, \quad \varphi(x) = 2 \cos^2 \frac{\pi x}{2l}. \quad (3.28)$$

**1.** Записуємо задачу ШЛ:

$$X'' = -\nu^2 X, \quad X'(0) = 0, \quad X'(l) = 0.$$

Очевидним власним числом є нуль. Йому відповідає стала власна функція.

При  $\nu > 0$  підставляємо вираз (2.13) загального розв'язку рівняння для  $X$  у межові умови і одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \nu B = 0, \\ -\nu A \sin \nu l + \nu B \cos \nu l = 0, \end{cases}$$

з якої знаходимо  $B = 0$ ,  $A \sin \nu l = 0$ . Оскільки шукаються ненульові розв'язки, то повинно бути  $\sin \nu l = 0$ . Додатними розв'язками цього рівняння відносно  $\nu$  є числа  $n\pi/l$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Фіксуючи довільне ненульове значення  $A$ , дістаємо відповідаючі їм власні функції. Приєднавши раніше знайдений власний елемент, одержимо повний розв'язок поставленої задачі ШЛ:

$$\nu_n = \frac{n\pi}{l}, \quad X_n(x) = \cos \nu_n x, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (3.29)$$

2. Порівнявши (3.28) із (3.29), бачимо, що

$$f(x, t) = 2\sqrt{t+1} (X_0(x) - X_1(x)), \quad \varphi(x) = X_0(x) + X_1(x).$$

Таким чином,

$$\varphi_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n \leq 1, \\ 0 & \text{при } n \geq 2 \end{cases} \quad \text{і } f_n(t) = c_n \sqrt{t+1}, \quad \text{де } c_n = \begin{cases} (-1)^n & \text{при } n \leq 1, \\ 0 & \text{при } n \geq 2. \end{cases}$$

За допомогою символу Кронекера ці вирази можна записати одним рядком:

$$\varphi_n = \delta_{n0} + \delta_{n1}, \quad c_n = \delta_{n0} - \delta_{n1}. \quad (3.30)$$

Застосування загальних інтегральних формул (3.9) і (3.10) було б у цій ситуації вкрай недоцільним.

3. Задача Копі (3.8) із такими  $M$  і  $f_n$  має вигляд:

$$\begin{cases} \dot{u}_n = -((2(t+1))^{-1} + a^2 \nu_n^2) u_n + c_n \sqrt{t+1}, \\ u_n(0) = \varphi_n \end{cases} \quad (3.31)$$

(нагадаємо, що  $\varphi_n$  це колишнє  $\varphi_{kn}$ ). Розв'язати її потрібно тільки при  $n \leq 1$ , адже при  $n > 1$  вона, як видно з (3.30), однорідна і, значить,

$$u_n = 0 \quad \text{при } n > 1. \quad (3.32)$$

Позначивши  $b = a^2 \nu_1^2 \equiv (a\pi/l)^2$  і взявши до уваги (3.29) і (3.30), сконкретизуємо (3.31) при  $n \leq 1$  так:

$$\begin{cases} \dot{u}_0 = -(2(t+1))^{-1} u_0 + \sqrt{t+1}, \\ u_0(0) = 1; \\ \dot{u}_1 = -((2(t+1))^{-1} + b) u_1 - \sqrt{t+1}, \\ u_1(0) = 1. \end{cases}$$

Розв'язавши обидві задачі методом варіювання сталих, знаходимо

$$u_0(t) = \frac{1}{2} \left[ (t+1)^{-1/2} + (t+1)^{3/2} \right],$$

$$u_1(t) = \left( (1+b^{-1}-b^{-2}) e^{-bt} + b^{-2} \right) (t+1)^{-1/2} - b^{-1} (t+1)^{1/2}.$$

Тепер формула

$$u(x, t) = u_0(t) + u_1(t) \cos \frac{\pi x}{l}$$

(конкретизація (3.5) з урахуванням (3.32) і (3.29)) стає відповіддю. >

### Приклад 3.3

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = a^2 u_{xx} + 2tx + 1, \\ u_x(-l, t) = t^2, \\ u(l, t) = lt^2 + t, \\ u(x, 0) = \cos \frac{\pi x}{4l} - \sin \frac{\pi x}{4l}. \end{array} \right.$$

< Тут  $\chi_1(t) = t^2$ ,  $\chi_2(t) = lt^2 + t$ . Оскільки межові умови неоднорідні, то відразу виконувати відокремлення змінних не можна. Підбираємо спочатку функцію  $w$  таку, що

$$w_x(-l, t) = \chi_1(t), \quad w(l, t) = \chi_2(t). \quad (3.33)$$

Шукаємо її у вигляді (3.16). Підстановка цього виразу в рівності (3.33) дає систему рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} Q = \chi_1, \\ R + lQ = \chi_2, \end{array} \right.$$

розв'язавши яку знаходимо

$$w(x, t) = \chi_2(t) + (x-l)\chi_1(t) \equiv t + xt^2. \quad (3.34)$$

Вводимо нову невідому функцію  $v = u - w$ . Замінивши  $u$  на  $v + w$  в рівнянні і крайових умовах, одержимо з урахуванням (3.33) і очевидних рівностей  $w_{xx} = 0$ ,  $w_t(x, t) = 2xt + 1$ ,  $w(x, 0) = 0$  крайову задачу для  $v$  (конкретизацію (3.15))

$$\left\{ \begin{array}{l} v_t = a^2 v_{xx}, \\ v_x(-l, t) = 0, \quad v(l, t) = 0, \\ v(x, 0) = \cos \frac{\pi x}{4l} - \sin \frac{\pi x}{4l}, \end{array} \right.$$

до якої вже можна застосовувати алгоритм відокремлення змінних.

1. Записуємо задачу ШЛ:

$$X'' = -\nu^2 X, \quad X'(-l) = 0, \quad X(l) = 0.$$

Оскільки одна з межових умов не другого роду, то число нуль не власне. При  $\nu > 0$  підставляємо загальний розв'язок (2.13) диференціального рівняння в межові умови і одержуємо систему рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} A \sin \nu l + B \cos \nu l = 0, \\ A \cos \nu l + B \sin \nu l = 0 \end{array} \right. \quad (3.35)$$

відносно  $A$  і  $B$ . Для того, щоб вона мала ненульовий розв'язок, необхідно і достатньо, щоб її визначник дорівнював нулю, тобто справджувалась рівність  $\cos 2\nu l = 0$ . З неї знаходимо власні числа  $\nu_n^2$ :

$$\nu_n = \frac{(2n+1)\pi}{4l}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (3.36)$$

При таких  $\nu$  рівняння системи (3.35) пропорційні. Щоб задовольнити перше з них, а значить і обидва, можна покласти

$$A = \sqrt{2} \cos \nu l, \quad B = -\sqrt{2} \sin \nu l$$

(ненульовий множник вибирається довільно). Тоді рівність (2.13) з  $\nu = \nu_n$  перетворюється на вираз власної функції. Зокрема,

$$X_0(x) = \cos \nu_0 x - \sin \nu_0 x. \quad (3.37)$$

2. Порівнявши (3.37) і (3.36) з початковою умовою для  $v$ , бачимо, що  $v(x, 0) = X_0(x)$ .

3. У загальному випадку  $v$  треба шукати у вигляді

$$v(x, t) = \sum_{n=n_0}^{\infty} v_n(t) X_n(x)$$

(перепозначення (3.5)), але в нашому випадку при всіх  $n > n_0 = 0$  маємо однорідну задачу Коші (так що  $v_n = 0$  при  $n > 0$ ) і тільки при  $n = 0$  неоднорідну:

$$\dot{v}_0 = -a^2 \nu_0^2 v_0, \quad v_0(0) = 1. \quad (3.38)$$

Тому  $v(x, t) = v_0(t) X_0(x)$ .

Розв'язавши (3.38), одержуємо з урахуванням (3.37) і (3.36)

$$v(x, t) = e^{-a^2 \pi t / 4l} \left( \cos \frac{\pi x}{4l} - \sin \frac{\pi x}{4l} \right).$$

Це спільно з рівностями  $u = v + w$  і (3.34) дає відповідь.  $\triangleright$

### Приклад 3.4

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f, \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases}$$

$\triangleleft$  Тут  $m = 2$ ,  $M = \partial^2 / \partial t^2$ ,  $p = 1$ ,  $q = 0$ ,  $\rho = 1$ . Межові умови однорідні, тому можна відразу відокремлювати змінні.

1. Власні елементи задачі ШЛ

$$X'' = -\nu^2 X, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0$$

знайдено в прикладі 2.1:

$$\nu_n = \frac{n\pi}{l}, \quad X_n(x) = \sin \nu_n x, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.39)$$

2. Оскільки  $f$ ,  $\varphi$  і  $\psi$  довільні, то можна тільки обчислити квадрат



норми власної функції:  $\|X_n\|^2 = \int_0^l \sin^2 \nu_n x dx = l/2$ . Цим вирази (3.9) і (3.10) коефіцієнтів Фур'є дещо конкретизуються:

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \nu_n x dx \quad (3.40)$$

і так само (без  $t$ ) для  $\varphi_n$  і  $\psi_n$ .

**3. Задача Коші (3.8) має вигляд**

$$\begin{cases} \ddot{u}_n = -\omega_n^2 u_n + f_n, \\ u_n(0) = \varphi_n, \quad \dot{u}_n(0) = \psi_n, \end{cases} \quad (3.41)$$

де  $\omega_n = a\nu_n$ . Розв'язок її дається відомою з диференціальних рівнянь формулою

$$u_n(t) = \varphi_n \cos \omega_n t + \psi_n \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n} + \int_0^t \frac{\sin \omega_n(t - \tau) f_n(\tau)}{\omega_n} d\tau, \quad (3.42)$$

охоплюючою й випадок  $\omega_n = 0$ .

Тепер рівність (3.5) із  $n_0 = 1$  стає відповіддю.  $\triangleright$

### Приклад 3.5

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + g(x) \sin \omega t, \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

( $\omega$  – додатне число).

$\triangleleft$  Це окремий випадок попереднього прикладу:  $\varphi = 0$ ,  $\psi = 0$ ,  $f(x, t) = g(x) \cos \omega t$ . Остання рівність дозволяє переписати (3.40) у вигляді  $f_n(t) = g_n \sin \omega t$ , де

$$g_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) X_n(x) dx. \quad (3.43)$$

Тоді формула (3.42) конкретизується так:

$$u_n(t) = \frac{g_n}{\omega_n} \int_0^l \sin \omega_n(t - \tau) \sin \omega \tau d\tau.$$

Записавши  $2 \sin \omega_n(t - \tau) \sin \omega \tau = \cos((\omega + \omega_n)\tau - \omega_n t) - \cos((\omega - \omega_n)\tau + \omega_n t)$ , бачимо, що при  $\omega \neq \omega_n$

$$u_n(t) = \frac{g_n}{2\omega_n} \left( \frac{\sin \omega t + \sin \omega_n t}{\omega + \omega_n} - \frac{\sin \omega t - \sin \omega_n t}{\omega - \omega_n} \right), \quad (3.44)$$

або, рівносильно,

$$u_n(t) = \frac{g_n(\omega \sin \omega_n t - \omega_n \sin \omega t)}{\omega_n(\omega^2 - \omega_n^2)}, \quad n \neq \frac{l\omega}{a\pi} \quad (3.45)$$

(умову на  $n$  написано з урахуванням (3.39)).

Якщо ж  $\omega = \omega_{n^*}$  (цим ми вводимо індивідуальне позначення для номера тієї власної частоти, яка співпадає<sup>3</sup> з частотою зовнішньої періодичної сили), то переходимо в (3.44) до границі при  $\omega_n \rightarrow \omega$  і одержуємо

$$u_{n^*}(t) = \frac{g_{n^*}}{2\omega} \left( \frac{\sin \omega t}{\omega} + t \cos \omega t \right), \quad n^* = \frac{l\omega}{a\pi}.$$

Тепер, коли функції  $X_n$  і  $u_n$  знайдено, рівність (3.5), у якій  $n_0 = 1$ , стає відповіддю. Проаналізуємо її.

При  $n \neq l\omega/a\pi$  доданок  $u_n(t)X_n(x)$  описує, як видно з (3.39) і (3.45) суму двох стоячих хвиль зі сталими амплітудами. Доданок же  $u_{n^*}(t)X_{n^*}(x)$  описує стоячу хвилю, амплітуда якої  $g_{n^*}\sqrt{1 + \omega^2 t^2}/2\omega^2$  при  $g_{n^*} \neq 0$  необмежено зростає з часом. Це явище називається *резонансом*. Для настання його необхідно і достатньо, щоб число  $n^* = l\omega/a\pi$  було цілим і  $g_{n^*} \neq 0$ . ▷

### Приклад 3.6

$$\left\{ \begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} - \left( \frac{4a^2(2-\cos x)}{5-4\cos x} + \omega^2 x^2 \right) \cos \omega t, \\ u_x(0, t) &= 2\pi t, \quad u_x(\pi, t) = 2\pi \cos \omega t, \\ u(x, 0) &= x^2, \quad u_t(x, 0) = x(2\pi - x). \end{aligned} \right.$$

◁ За формулою (3.18)

$$w(x, t) = x^2 \cos \omega t - (\pi - x)^2 t. \quad (3.46)$$

Записавши  $w_{tt} = -\omega^2 x^2 \cos \omega t$ ,  $w_{xx} = 2 \cos \omega t - 2t$ ,  $w(x, 0) = x^2$ ,  $w_t(x, 0) = -(\pi - x)^2$ , бачимо, що функція  $v = u - w$  є розв'язком задачі

$$\left\{ \begin{aligned} v_{tt} &= a^2 v_{xx} - 2a^2 \left( \frac{1-(1/2)\cos x}{5/4-\cos x} - 1 \right) \cos \omega t - 2a^2 t, \\ v_x(0, t), \quad v_x(\pi, t) &= 0, \\ v(x, 0) &= 0, \quad v_t(x, 0) = \pi^2. \end{aligned} \right.$$

Записавши при  $|b| < 1$

$$\frac{1 - b \cos x}{1 + b^2 - 2b \cos x} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1 - b e^{ix}} - \frac{1}{1 - b e^{-ix}} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos nx$$

<sup>3</sup>Див. *Англо-український словник з програмування і математики* (укладачі М. Кратко, М. Кікець, Є. Мейнарович, В. Павленко, І. Черненко, Д. Шерік) або *Орфографічний словник наукових і технічних термінів* В. Карачуна. У необхідності цього слова переконує фраза з класичної книги Ф. Ріса і Б. Секельфаві-Надя *Лекції по функціональному аналізу*: “Последовательность целых чисел сходится только тогда, когда все её члены начиная с некоторого совпадают”.

і поклавши  $b = 1/2$ , перетворимо рівняння для  $v$  до вигляду

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} - 2a^2 \cos \omega t \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cos nx - 2a^2 t,$$

де вільний член уже розкладено по власних функціях розв'язаної в прикладі 3.2 задачі ШЛ

$$X'' = -\nu^2 X, \quad X'(0) = 0, \quad X'(\pi) = 0.$$

Узявши далі до уваги, що  $v_t(x, 0) = \pi^2 X_0$ , виписуємо для коефіцієнтів розкладу

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t) \cos nx \quad (3.47)$$

(конкретизація (3.5) із перепозначенням  $u$  на  $v$ ) задачі Коші виду (3.8):

$$\begin{aligned} \ddot{v}_0 &= -2a^2 t, \quad v_0(0) = 0, \quad \dot{v}_0(0) = \pi^2, \\ \ddot{v}_n &= -a^2 n^2 v_n + 2^{1-n} a^2 \cos \omega t, \quad v_n(0) = 0, \quad \dot{v}_n(0) = 0 \quad (n \geq 1). \end{aligned}$$

Розв'язок першої очевидний:

$$v_0(t) = \pi^2 t - a^2 t^3 / 3, \quad (3.48)$$

розв'язок решти дається формулою (3.42) з перепозначенням  $u$  на  $v$ :

$$v_n(t) = \frac{a}{2^{1-n} n} \int_0^t \sin an(t-\tau) \cos \omega \tau d\tau = \begin{cases} \frac{a^2 (\cos ant - \cos \omega t)}{2^{n-1} (\omega^2 - a^2 n^2)}, & n \neq \omega/a, n > 0, \\ \frac{a^2 t \sin \omega t}{2^{n-1} \omega}, & n = \omega/a. \end{cases} \quad (3.49)$$

Рівності (3.46) – (3.49) і  $u = v + w$  дають відповідь. Бачимо, що у випадку  $\omega/a \in \mathbb{N}$  настає резонанс.  $\triangleright$

Розв'язати задачу Коші з однорідними межовими умовами:

- |   |  |
|---|--|
| <p>1. <math>\left\{ \begin{aligned} u_t &amp;= u_{xx} + t \sin x, \\ u(0, t) &amp;= u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) &amp;= \cos x. \end{aligned} \right.</math></p>                                 | <p>4. <math>\left\{ \begin{aligned} u_{tt} &amp;= a^2 u_{xx}, \\ u_x(0, t) &amp;= u_x(2, t) = 0, \\ u(x, 0) &amp;= \cos^2 x, u_t(x, 0) = \sin^2 x. \end{aligned} \right.</math></p>                            |
| <p>2. <math>\left\{ \begin{aligned} u_t &amp;= 4u_{xx} + 2 \sin \frac{\pi x}{2l} \cos \frac{\pi x}{l}, \\ u(0, t) &amp;= u_x(l, t) = 0, \\ u(x, 0) &amp;= 1. \end{aligned} \right.</math></p> | <p>5. <math>\left\{ \begin{aligned} u_{tt} &amp;= 4u_{xx} + t, \\ u(0, t) &amp;= u_x(1, t) = 0, \\ u(x, 0) &amp;= 2 \sin \pi x \cos \frac{3}{2} \pi x, \\ u_t(x, 0) &amp;= 0. \end{aligned} \right.</math></p> |
| <p>3. <math>\left\{ \begin{aligned} u_t &amp;= 9u_{xx} + \cos^3(x/2), \\ u_x(0, t) &amp;= u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) &amp;= x. \end{aligned} \right.</math></p>                                | <p>6. <math>\left\{ \begin{aligned} u_t &amp;= u_{xx} + 2 \sin \frac{3\pi x}{2} \cos \frac{\pi x}{2}, \\ u(0, t) &amp;= u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) &amp;= 4 \sin^3 \pi x. \end{aligned} \right.</math></p>        |

$$7. \begin{cases} u_t = u_{xx} + e^t \sin x, \\ u(0, t) = u_x(\pi/2, t) = 0, \\ u(x, 0) = \sin 3x. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} u_t = u_{xx} + t \cos x, \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = \sin(x/2). \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} - 9t \sin(3x/2), \\ u(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = 2 \cos(x/2) \sin 2x, \\ u_t(x, 0) = 2 \sin(x/2) \cos 2x. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(0, t) = u_x(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} u_t = u_{xx}, \\ u(a, t) = u_x(b, t) = 0, \\ u(x, 0) = 1. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} u_t = u_{xx}, \\ u(-l, t) = u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = x. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} u_t = 3u_{xx} + 1, \\ u_x(-2, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} u_t = 4u_{xx} + \cos \pi x, \\ u_x(-1, t) = u_x(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = \sin \pi x. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \\ u(1, t) = u_x(4, t) = 0, \\ u(x, 0) = \cos \frac{\pi x}{2}, \quad u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} u_t = u_{xx}, \\ u_x(0, t) = u_x(l, t) + hu(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = 1. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + x, \\ u_x(0, t) - hu(0, t) = u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} u_t = 2tu_{xx} + e^{-t^2} \cos x, \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = \cos^3 x. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} u_{tt} + 2u_t + u = u_{xx}, \\ u(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = x. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} u_{ttt} = u_{xx} + \sin x, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \\ u_{tt}(x, 0) = 0. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + t \sin \omega t \sin x, \\ u(0, t) = u_x(\pi/2, t) = 0, \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} u_t = \frac{l^2}{\pi^2(t+1)} u_{xx} + 2t \sin^2 \frac{\pi x}{2l}, \\ u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = 2 \cos^2 \frac{\pi x}{l}. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} u_t = u_{xx} + \sin^3 x, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = \sin \mu x, \quad \mu \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} u_t = u_{xx} + \cos^4 x, \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = e^x. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} u_t = (1 - x^2)u_{xx} - 2xu_x + tx, \\ u(\cdot, t) \in C^1[-1, 1], \\ u(x, 0) = 3x^2 + 2. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} u_t = (1 - x^2)u_{xx} - 2xu_x, \\ u(0, t) = 0, \quad u(\cdot, t) \in C^1[0, 1], \\ u(x, 0) = 1. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} u_t = (1 - x^2)u_{xx} - 2xu_x - \sin t, \\ u_x(0, t) = 0, \quad u(\cdot, t) \in C^1[0, 1], \\ u(x, 0) = x^2, \quad u_t(x, 0) = 1. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} u_t = (1 - x^2)u_{xx} - 2xu_x, \\ u(\cdot, t) \in C^1[-1, 1], \\ u(x, 0) = (1 - x \sin \alpha)^{-1/2}. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} u_t = (1 - x^2)u_{xx} - 2xu_x, \\ u(0, t) = 0, \quad |u(1, t)| < \infty, \\ u(x, 0) = \arcsin x. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} u_t = (1 - x^2)u_{xx} - xu_x + x^2, \\ u(\cdot, t) \in C^1[-1, 1], \\ u(x, 0) = x^3. \end{cases}$$

31.  $\left\| \begin{array}{l} u_t = u_{xx} - x^2 u, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = e^{-\alpha x^2/2}. \end{array} \right.$
32.  $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx} - x^2 u + \cos \alpha x, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \sin \alpha x. \end{array} \right.$
33.  $\left\| \begin{array}{l} u_t = a^2 u_{xx} - g(u - U), \\ u_x(0, t) = u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{array} \right.$
34.  $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2\mu u_t + f(x), \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \end{array} \right.$
35.  $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = \frac{u_{xx} - 2u_x}{4(t+1)^2} + \sqrt{t+1} e^x \sin x, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = e^x (\pi/2 - x), \\ u_t(x, 0) = e^x \cos 2x. \end{array} \right.$

Розв'язати задачу Коші з неоднорідними межовими умовами:

36.  $\left\| \begin{array}{l} u_t = u_{xx} + 1 + \sin x, \\ u(0, t) = t, \quad u_x(\pi/2, t) = 1, \\ u(x, 0) = 1 + x. \end{array} \right.$
37.  $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = 4u_{xx}, \\ u(0, t) = t, \quad u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = 4 \sin \pi x \cos^2 \pi x, \\ u_t(x, 0) = -x. \end{array} \right.$
38.  $\left\| \begin{array}{l} u_t = u_{xx}, \\ u_x(0, t) = \pi(t - 1), \\ u_x(\pi, t) = \pi(t + 1), \\ u(x, 0) = x^2. \end{array} \right.$
39.  $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx}, \\ u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = \pi \sin t, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0. \end{array} \right.$
40.  $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx}, \\ u(0, t) = t, \quad u_x(l, t) = 1, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 1. \end{array} \right.$
41.  $\left\| \begin{array}{l} u_t = u_{xx} + x - \pi \cos^2(x/2), \\ u_x(0, t) = t, \quad u(\pi/2, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0. \end{array} \right.$
42.  $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx} - l \sin^2 \frac{\pi x}{4l} + \frac{x}{2}, \\ u_x(0, t) = t^2/4, \quad u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \cos \frac{3\pi x}{2l}. \end{array} \right.$
43.  $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx}, \\ u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = \sin \omega t, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0. \end{array} \right.$
44.  $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = a^2 u_{xx} - x \cos t, \\ u_x(0, t) - h u(0, t) = \cos t - h \sin t, \\ u(1, t) = \cos t + \sin t, \\ u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = 0. \end{array} \right.$
45.  $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx} + t(1 - 6x), \\ u_x(0, t) = 0, \quad u(1, t) = t, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = x^3. \end{array} \right.$
46.  $\left\| \begin{array}{l} u_t = u_{xx} - \sin x, \\ u_x(0, t) = -1, \quad u_x(\pi, t) = 1, \\ u(x, 0) = 0. \end{array} \right.$
47.  $\left\| \begin{array}{l} u_t = u_{xx} + 2(1 + t) \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}, \\ u(0, t) = 0, \quad u(\pi/2, t) = t, \\ u(x, 0) = 0. \end{array} \right.$
48.  $\left\| \begin{array}{l} u_t = (1 - x^2) u_{xx} - 2x u_x, \\ u(0, t) = e^{-2t}, \quad |u(1, t)| < \infty, \\ u(x, 0) = 1. \end{array} \right.$
49.  $\left\| \begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx} - x^2 u, \quad x \in \mathbb{R}_+, \\ u_x(0, t) = \cos t, \\ u(x, 0) = x e^{-x^2/2}, \quad u_t(x, 0) = 0. \end{array} \right.$

## § 4. Рівняння еліптичного типу в прямокутнику

Рівняння еліптичного типу описують просторові розподіли незмінних у часі фізичних величин. Тому часова змінна в них відсутня і в крайовій задачі накладаються тільки межові умови. Їх регулярна задача в прямокутнику містить чотири – за числом сторін. Розглядаємо не найзагальнішу постановку, а таку, в якій змінні відокремлюються:

$$\sigma Lu + \rho Ku = F, \quad x_1 < x < x_2, \quad y_1 < y < y_2, \quad (4.1)$$

$$S_j u = \chi_j, \quad y_1 < y < y_2, \quad j = 1, 2, \quad (4.2)$$

$$T_j u = \psi_j, \quad x_1 < x < x_2, \quad j = 1, 2. \quad (4.3)$$

Тут

$$L = \frac{\partial}{\partial x} \left( p \frac{\partial}{\partial x} \right) - q, \quad K = \frac{\partial}{\partial y} \left( g \frac{\partial}{\partial y} \right) - h, \quad (4.4)$$

$$S_j = \left( \alpha_j + (-1)^j \beta_j \frac{\partial}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_j}, \quad T_j = \left( \gamma_j + (-1)^j \delta_j \frac{\partial}{\partial y} \right) \Big|_{y=y_j}, \quad (4.5)$$

$\alpha_j, \beta_j$  і  $\gamma_j, \delta_j$  – пари невід'ємних чисел такі, що в кожній хоча б один елемент відмінний від нуля;  $\rho = \rho(x)$  і  $\sigma = \sigma(x)$  – додатні неперервні інтегровні функції на  $[x_1, x_2]$  і  $[y_1, y_2]$  відповідно;  $F = F(x, y)$  – неперервна абсолютно інтегровна функція,  $\chi_j = \chi_j(y)$  і  $\psi_j = \psi_j(x)$  – кусково неперервні функції;  $q = q(x)$  і  $h = h(y)$  – невід'ємні неперервні, а  $p = p(x)$  і  $g = g(y)$  – додатні рівномірно неперервні і неперервно диференційовні функції на відповідних інтервалах. У регулярній задачі  $p$  і  $g$  відмінні від нуля також і на кінцях інтервалів. Якщо це порушується, то на відповідному кінці замість регулярної межової умови (4.2) або (4.3) накладають сингулярну. Шукана функція  $u$  повинна бути неперервно диференційовною у внутрішніх точках прямокутника і неперервно прилягати до його межі.

Звертаємо увагу читача на те, що в (4.1) кожен із диференціальних операторів  $L$  і  $K$  діє по одній із змінних, а множиться на функцію іншої.

Вирази (4.5) функціоналів  $S_j$  і  $T_j$  показують, що крайові умови по кожній із змінних *розщеплені*, тобто в одній умові фігурує значення функції і/або її похідної тільки на одному кінці відрізка.

Назвемо задачу (4.1) – (4.3) *елементарною*, якщо по одній із змінних (тобто на одній з пар протилежних сторін) межові умови однорідні. До такої задачі МВЗ можна застосовувати відразу. Порівняно з § 3 змінюється третій крок алгоритму: тепер додатковими до рівняння умовами будуть не початкові, а межові. Випишемо алгоритм окремо для кожного з двох можливих в елементарній задачі випадків.

а)  $\chi_1 = \chi_2 = 0$  (однорідні умови на вертикальних сторонах).

1<sub>а</sub>. Знаходимо власні елементи  $(\nu_n^2, X_n)$  задачі IIII

$$\begin{cases} LX = -\nu^2 \rho X, \\ S_j X = 0, \quad j = 1, 2. \end{cases} \quad (4.6)$$

2<sub>а</sub>. Знаходимо коефіцієнти  $f_n(y)$ ,  $\psi_{1n}$ ,  $\psi_{2n}$  розкладів функцій  $F(\cdot, y)/\rho$ ,  $\psi_1$  і  $\psi_2$  по базису  $(X_n)$ .

**3а.** Для кожного  $n$  розв'язуємо крайову задачу

$$\begin{cases} Ku_n - \sigma \nu_n^2 u_n = f_n, \\ T_j u_n = \psi_{jn}, \quad j = 1, 2. \end{cases} \quad (4.7)$$

Формальний розв'язок задачі (4.1) – (4.3) в цьому випадку дається формулою

$$u(x, y) = \sum_n u_n(y) X_n(x). \quad (4.8)$$

6)  $\psi_1 = \psi_2 = 0$  (однорідні умови на горизонтальних сторонах).

**1б.** Знаходимо власні елементи  $(\kappa_n^2, Y_n)$  задачі ШЛ

$$\begin{cases} KY = -\kappa^2 \sigma Y, \\ T_j Y = 0, \quad j = 1, 2. \end{cases} \quad (4.9)$$

**2б.** Знаходимо коефіцієнти  $f_n(x)$ ,  $\chi_{1n}$ ,  $\chi_{2n}$  розкладів функцій  $F(x, \cdot)/\sigma$ ,  $\chi_1$  і  $\chi_2$  по базису  $(Y_n)$ .

**3б.** Для кожного  $n$  розв'язуємо крайову задачу

$$\begin{cases} Lu_n - \rho \kappa_n^2 u_n = f_n, \\ S_j u_n = \chi_{jn}, \quad j = 1, 2. \end{cases} \quad (4.10)$$

Формальний розв'язок задачі (4.1) – (4.3) в цьому випадку дається формулою

$$u(x, y) = \sum_n u_n(x) Y_n(y). \quad (4.11)$$

Щоб полегшити читачеві виконання третього кроку, нагадаємо деякі факти з теорії звичайних диференціальних рівнянь. Нехай  $\Lambda$  – лінійний диференціальний оператор другого порядку на деякому інтервалі  $]b_1, b_2[$ ,  $Q_1$  і  $Q_2$  – лінійні неперервні функціонали на просторі  $C^1[b_1, b_2]$  (такими є  $S_j$  і  $T_j$ ; інший приклад – інтеграл від  $b_1$  до  $b_2$ ). Щоб розв'язати лінійну диференціальну (не обов'язково крайову) задачу

$$\begin{cases} \Lambda V = f, \\ Q_j V = c_j, \quad j = 1, 2, \end{cases} \quad (4.12)$$

де  $f$  – задана неперервна функція,  $c_1$  і  $c_2$  – задані числа, потрібно знайти розв'язки  $V_1$  і  $V_2$  одного диференціального рівняння  $\Lambda V = 0$  такі, що

$$\begin{cases} Q_1 V_1 = 0, & Q_2 V_1 \neq 0, \\ Q_1 V_2 \neq 0, & Q_2 V_2 = 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

Тоді розв'язок задачі (4.12) дається формулою

$$V(x) = \frac{c_1 V_2(x)}{Q_1 V_2} + \frac{c_2 V_1(x)}{Q_2 V_1} + \int_{b_1}^{b_2} G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad (4.14)$$

де  $G$  – функція Гріна задачі (4.12). Якщо функціонали  $Q_j$  мають вигляд, аналогічний (4.5), тобто задають розщеплені крайові умови, а оператор  $\Lambda$  має вигляд, аналогічний (4.4) (коефіцієнт при  $V'$  у  $\Lambda V$  є похідною коефіцієнта  $k$  при  $V''$ ), то ([11, с. 254], [27, с. 61]):

$$G(x, \xi) = \frac{V_1(x \wedge \xi) V_2(x \vee \xi)}{k W_{V_1 V_2}}, \quad (4.15)$$

що дозволяє записати рівність (4.14) так:

$$V(x) = \frac{c_1 V_2(x)}{Q_1 V_2} + \frac{c_2 V_1(x)}{Q_2 V_1} + \frac{1}{k W_{V_1 V_2}} \left[ V_2(x) \int_{b_1}^x V_1(\xi) f(\xi) d\xi + V_1(x) \int_x^{b_2} V_2(\xi) f(\xi) d\xi \right]. \quad (4.16)$$

Тут

$$W_{V_1 V_2} = \begin{vmatrix} V_1 & V_2 \\ V_1' & V_2' \end{vmatrix}$$

– визначник Вронського, або вронсіан, пари  $(V_1, V_2)$ . Як  $k$ , так і  $W_{V_1 V_2}$  можуть залежати від  $x$ , але з формули Остроградського–Ліувіля випливає, що за зробленого вище припущення про  $\Lambda$  добуток  $k W_{V_1 V_2}$  сталий.

Якщо будова оператора  $\Lambda$  зумовлює сингулярність задачі на кінці  $b_j$ , то рівність  $Q_j V = c$  слід замінити умовою обмеженості  $V$  і  $V'$  в околі  $b_j$ . Ця умова, очевидно, однорідна, що дозволяє узагальнити властивість (4.13) пари  $(V_1, V_2)$  так:  $V_j$  задовольняє однорідну межу умову на кінці  $b_j$  і не задовольняє на іншому кінці,  $j = 1, 2$ . Тоді формула (4.16) переноситься і на сингулярні задачі, якщо формально покласти  $c_j = 0$  на відповідному кінці.

Формулу (4.16) недоцільно використовувати, якщо відомий якийсь частинний розв'язок неоднорідного рівняння, бо через нього і функції  $V_j$  розв'язок задачі (4.12) виражається без інтегрування (див. приклади нижче).

Загальну задачу (4.1) – (4.3) можна звести до елементарної двома способами. В обох шукаємо розв'язок у вигляді

$$u = v + w. \quad (4.17)$$

У першому способі від  $w$  вимагаємо тільки, щоб вона задовольняла неоднорідні межові умови по одній із змінних (таку функцію можна підібрати у вигляді (3.16) або (3.17), належно перепозначивши змінні); у другому ж як  $v$ , так і  $w$  – розв'язки елементарних крайових задач

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma L v + \rho K v = E, \\ S_j v = 0, \quad j = 1, 2, \\ T_j v = \psi_j, \quad j = 1, 2; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma L w + \rho K w = H, \\ S_j w = \chi_j, \quad j = 1, 2, \\ T_j w = 0, \quad j = 1, 2. \end{array} \right.$$

Тут  $E$  і  $H$  – довільні неперервні абсолютно інтегровні функції, що задовольняють умову  $E + H = F$ .

Скрізь нижче символ  $\Delta$  означає оператор Лапласа.

#### Приклад 4.1

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 6bx, \\ u(0, y) = 1, \quad u(a, y) = a^3 y, \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = bx^3. \end{array} \right.$$



◁ Тут  $p = g = \sigma = \rho = 1$ ,  $q = h = 0$ ,  $F(x, t) = 6bx$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = a$ ,  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = b$ ,  $\alpha_i = \gamma_i = 1$ ,  $\beta_i = \delta_i = 0$ ,  $\chi_1(y) = 1$ ,  $\chi_2(y) = a^3y$ ,  $\psi_1(x) = 0$ ,  $\psi_2(x) = bx^3$ . Очевидно, функція  $w(x, y) = x^3y$  задовольняє межові умови по  $y$ . Тоді функція  $v = u - w$  є розв'язком задачі

$$\left\| \begin{array}{l} \Delta v = 6x(b - y), \\ v(0, y) = 1, \quad v(a, y) = a^3(y - b), \\ v(x, 0) = 0, \quad v(x, b) = 0. \end{array} \right.$$

До неї застосовний варіант б) алгоритму відокремлювання змінних.

### 1. Задачу ШЛ

$$\left\| \begin{array}{l} Y'' = -\varkappa^2 Y, \\ Y(0) = 0, \quad Y(b) = 0 \end{array} \right. \quad (4.18)$$

ми вже розв'язали в інших позначеннях у прикладі 2.1. У теперішніх позначеннях її власні елементи записуються так:

$$\varkappa_n = n\pi/b, \quad Y_n(y) = \sin \varkappa_n y, \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.19)$$

(власними числами є  $\varkappa_n^2$ ).

2. Очевидно,  $\|Y_n\|^2 = b/2$ . Звідси і з рівностей

$$\begin{aligned} \int_0^b Y_n(y) dy &= \frac{1 - \cos \varkappa_n b}{\varkappa_n} \equiv \frac{1 - (-1)^n}{\varkappa_n}, \\ \int_0^b (b - y) Y_n(y) dy &= \left. \frac{(y - b) \cos \varkappa_n y}{\varkappa_n} \right|_0^b + \frac{1}{\varkappa_n} \int_0^b \cos \varkappa_n y dy \end{aligned}$$

одержуємо при  $0 < y < b$

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} p_n Y_n(y), \quad b - y = \sum_{n=1}^{\infty} q_n Y_n(y), \quad (4.20)$$

де

$$p_n = b(1 - (-1)^n)/2\varkappa_n, \quad q_n = b^2/2\varkappa_n^2 \quad (4.21)$$

(ці позначення не пов'язані з  $p$  і  $q$  в (4.4)).

3. Замінивши в задачі для  $v$  вільний член і праві частини неоднорідних межових умов їхніми розкладами за формулами (4.20), бачимо, що

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) Y_n(y) \quad (4.22)$$

(перепозначення рівності (4.11)), де  $v_n$  – розв'язок задачі

$$\left\| \begin{array}{l} v_n'' - \varkappa_n^2 v_n = 6q_n x, \\ v_n(0) = \rho_n, \quad v_n(a) = -a^3 q_n. \end{array} \right. \quad (4.23)$$

Частинним розв'язком диференціального рівняння в ній є, очевидно, функція  $-6q_n \varkappa_n^{-2} x$ . Тоді для довільних лінійно незалежних розв'язків

$V_1$  і  $V_2$  однорідного рівняння

$$V'' - \kappa_n^2 V = 0 \quad (4.24)$$

розв'язок задачі (4.23) можна знайти у вигляді

$$v_n(x) = C_1 V_1(x) + C_2 V_2(x) - 6q_n \kappa_n^{-2} x, \quad (4.25)$$

підбравши сталі  $C_1$  і  $C_2$  з умов

$$\begin{aligned} C_1 V_1(0) + C_2 V_2(0) &= p_n, \\ C_1 V_1(a) + C_2 V_2(a) - 6q_n \kappa_n^{-2} a &= -a^3 q_n. \end{aligned}$$

Найпростіше це зробити, якщо  $V_1$  і  $V_2$  задовольняють умову (4.13), яка в даному разі виглядає так:  $V_1(0) = 0 \neq V_1(a)$ ,  $V_2(0) \neq 0 = V_2(a)$ . Тоді

$$C_1 = a q_n (6\kappa_n^{-2} - a^2) / V_1(a), \quad C_2 = p_n / V_2(0). \quad (4.26)$$

Розв'язками рівняння (4.24) є, очевидно, довільні лінійні комбінації експонент  $e^{\pm \kappa_n x}$ . Серед них потрібні властивості мають  $V_1(x) = \text{sh } \kappa_n x$  і  $V_2(x) = \text{sh } \kappa_n(a - x)$ . За такого вибору  $V_1$  і  $V_2$  рівність (4.25) набуває з урахуванням (4.26) і (4.21) вигляду

$$v_n(x) = \frac{ab^2(6\kappa_n^{-2} - a^2) \text{sh } \kappa_n x + b(1 - (-1)^n) \text{sh } \kappa_n(a - x)}{2\kappa_n^2 \text{sh } \kappa_n a} - \frac{3b^2 x}{\kappa_n^4}.$$

Тепер рівності (4.22), (4.19) і  $u(x, y) = v(x, y) + x^3 y$  дають відповідь.  $\triangleright$

## Приклад 4.2

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta u &= \cos y \cos \frac{\pi x}{2a} + \sin \frac{\pi y}{b}, \\ u_x(0, y) &= 2 \sin \frac{2\pi y}{b} \cos \frac{\pi y}{b}, \quad u(a, y) = 0, \\ u(x, 0) &= \cos \frac{3\pi x}{2a}, \quad u(x, b) = 0. \end{aligned} \right.$$

$\triangleleft$  Шукаємо розв'язок у вигляді (4.17), де  $v$  і  $w$  – розв'язки задач

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta v &= \cos y \cos \frac{\pi x}{2a}, \\ v_x(0, y) &= 0, \quad v(a, y) = 0, \\ v(x, 0) &= \cos \frac{3\pi x}{2a}, \quad v(x, b) = 0 \end{aligned} \right. \quad (4.27)$$

і

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta w &= \sin \frac{\pi y}{b}, \\ w_x(0, y) &= \sin \frac{\pi y}{b} + \sin \frac{3\pi y}{b}, \quad w(a, y) = 0, \\ w(x, 0) &= 0, \quad w(x, b) = 0 \end{aligned} \right. \quad (4.28)$$

(у правій частині межової умови для  $w$  на лівій вертикальній стороні стоїть тотожно перетворена права частина умови для  $u$  на ній же). До першої задачі застосовуємо варіант а) алгоритму, до другої – варіант б).

1. Задачу ШЛ (4.18) ми вже розв'язали. Записуємо задачу ШЛ

$$\left\{ \begin{aligned} X'' &= -\nu^2 X, \\ X'(0) &= 0, \quad X(a) = 0. \end{aligned} \right. \quad (4.29)$$

Оскільки одна з межових умов не другого роду, то число нуль не є власним. При  $\nu > 0$  підставляємо загальний розв'язок  $X(x) = A \cos \nu x + B \sin \nu x$  диференціального рівняння в межові умови і одержуємо  $B = 0$ ,  $A \cos \nu a = 0$ , звідки

$$\nu_n = (2n + 1)\pi/2a, \quad X_n(x) = \cos \nu_n x, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

**2.** Вільні члени і праві частини межових умов у задачах (4.27) і (4.28) уже розкладено по власних функціях задач ПЛ (4.18) і (4.29) відповідно, причому в ці розклади входять тільки  $X_0$ ,  $X_1$ ,  $Y_1$  і  $Y_2$ . Тому й розв'язки задач є лінійними комбінаціями цих же функцій:

$$v(x, y) = v_0(y) \cos \frac{\pi x}{2a} + v_1(y) \cos \frac{3\pi x}{2a}, \quad (4.30)$$

$$w(x, y) = w_1(y) \sin \frac{\pi y}{b} + w_2(y) \cos \frac{2\pi y}{b}. \quad (4.31)$$

**3.** Підставивши ці вирази в (4.27) і (4.28), одержуємо для коефіцієнтів розкладів крайові задачі

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} v_0'' - (\pi/2a)^2 v_0 = \cos y, \\ v_0(0) = 0, \quad v_0(b) = 0; \end{array} \right. & \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1'' - (3\pi/2a)^2 v_1 = 0, \\ v_1(0) = 1, \quad v_1(b) = 0; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} w_1'' - (\pi/b)^2 w_1 = 1, \\ w_1'(0) = 1, \quad w_1(a) = 0; \end{array} \right. & \quad \left\{ \begin{array}{l} w_2'' - (2\pi/b)^2 w_2 = 0, \\ w_2'(0) = 1, \quad w_2(a) = 0. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Розв'язавши їх стандартним чином, знаходимо

$$\begin{aligned} v_0(y) &= \left(1 + \left(\frac{\pi}{2a}\right)^2\right)^{-1} \left(\frac{\text{sh}(\pi y/2a) \cos b + \text{sh}(\pi(b-y)/2a)}{\text{sh}(\pi b/2a)} - \cos y\right), \\ v_1(y) &= \frac{\text{sh}(3\pi(b-y)/2a)}{\text{sh}(3\pi b/2a)}, \\ w_1(x) &= \left(\frac{b}{\pi}\right)^2 \left(\text{ch} \frac{\pi x}{b} - 1\right) + \frac{b \text{sh}(\pi(x-a)/b)}{\pi \text{ch}(\pi a/b)}, \\ w_2(x) &= \frac{b \text{sh}(2\pi(x-a)/b)}{2\pi \text{ch}(2\pi a/b)}. \end{aligned}$$

Тепер рівності (4.17), (4.30) і (4.31) дають відповідь.  $\triangleright$

### Приклад 4.3

$$\left\{ \begin{array}{l} (x+1)^2 u_{xx} + u_{yy} - 2u_y = e^{-y} h(x), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \\ u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = 0. \end{array} \right.$$

Тут  $h$  – абсолютно інтегровна на  $[0, 1]$  функція.

$\triangleleft$  Помноживши обидві частини рівняння на  $(x+1)^{-2} e^{-2y}$ , зведемо

його до вигляду (4.1) з

$$\mathbb{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \mathbb{K} = \frac{\partial}{\partial y} \left( e^{-2y} \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

$$\sigma(y) = e^{-2y}, \quad \rho(x) = (x+1)^{-2}, \quad F(x, y) = e^{-y}(x+1)^{-2}h(x).$$

Оскільки межові умови однорідні по обох змінних, то застосовні обидва варіанти алгоритму. Вибираємо другий.

1. Замінивши в (4.9)  $\mathbb{K}$ ,  $\sigma$  і  $\mathbb{T}_j$  їхніми виразами і помноживши обидві частини рівняння на  $e^{2y}$ , дістанемо

$$\begin{cases} Y'' - 2Y' = -\varkappa^2 Y, \\ Y(0) = 0, \quad Y(1) = 0. \end{cases}$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння дається формулою

$$Y(y) = \begin{cases} e^y (A \operatorname{ch} \sqrt{1 - \varkappa^2} y + B \operatorname{sh} \sqrt{1 - \varkappa^2} y), & \varkappa^2 < 1, \\ e^y (A + By), & \varkappa^2 = 1, \\ e^y (A \cos \sqrt{\varkappa^2 - 1} y + B \sin \sqrt{\varkappa^2 - 1} y), & \varkappa^2 > 1. \end{cases}$$

При  $\varkappa^2 \leq 1$  крайові умови можна задовольнити тільки поклавши  $A = B = 0$ , тому ці значення не власні. При  $\varkappa^2 > 1$  крайові умови дають  $A = 0$ ,  $\sin \sqrt{\varkappa^2 - 1} = 0$ . Отже, власними елементами задачі є

$$\varkappa_n^2 = n^2 \pi^2 + 1, \quad Y_n(y) = e^y \sin n\pi y, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.32)$$

2. Розкласти  $e^y$  по базису  $(Y_n)$  це все одно, що розкласти одиницю по синусах. Отже,

$$\frac{F(x, y)}{\sigma(y)} = h(x)(x+1)^{-2} \sum_{m=0}^{\infty} a_m Y_{2m+1}(y),$$

де

$$a_m = \frac{4}{(2m+1)\pi}. \quad (4.33)$$

З огляду на однорідність межових умов  $u(x, \cdot)$  розкладається по тому ж базису, що й  $F(x, \cdot)/\sigma$ :

$$u(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m(x) Y_{2m+1}(y) \equiv e^y \sum_{m=0}^{\infty} U_m(x) \sin(2m+1)\pi y \quad (4.34)$$

( $U_m$  – перепозначення  $u_{2m+1}$ ).

3. Записуємо ті задачі (4.10), у яких рівняння неоднорідне (а решта мають своїм розв'язком нуль):

$$\begin{cases} (x+1)^2 U_m'' - \varkappa_{2m+1}^2 U_m = a_m h, \\ U_m(0) = 0, \quad U_m(1) = 0. \end{cases} \quad (4.35)$$

Якщо ми знайдемо розв'язки  $V_1$  і  $V_2$  однорідного рівняння

$$(x+1)^2 V'' - \kappa_{2m+1}^2 V = 0 \quad (4.36)$$

такі, що

$$V_1(0) = 0 \neq V_1(1), \quad V_2(0) \neq 0 = V_2(1), \quad (4.37)$$

то формула (4.16) з  $k(x) = 1$ ,  $f(x) = a_m h(x)(x+1)^{-2}$ ,  $c_1 = c_2 = 0$  дасть розв'язок задачі (4.35).

Зауваживши, що (4.36) є рівнянням Ейлера, стандартним чином знаходимо розв'язки

$$V_{\pm}(x) = (x+1)^{1/2 \pm s_m}, \quad (4.38)$$

де

$$s_m = \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4\kappa_{2m+1}^2}. \quad (4.39)$$

Розв'язки ж  $V_1$  і  $V_2$  підбираємо як лінійні комбінації цих двох:

$$V_1(x) = V_-(0)V_+(x) - V_+(0)V_-(x), \quad V_2(x) = V_-(1)V_+(x) - V_+(1)V_-(x).$$

Вони мають властивість (4.37) незалежно від конкретних виразів функцій  $V_{\pm}$ . Урахування ж останніх дає

$$\begin{aligned} V_1(x) &= \sqrt{x+1} \left( (x+1)^{s_m} - (x+1)^{-s_m} \right), \\ V_2(x) &= \sqrt{2(x+1)} \left( \left( \frac{x+1}{2} \right)^{s_m} - \left( \frac{x+1}{2} \right)^{-s_m} \right). \end{aligned} \quad (4.40)$$

За властивостями визначників

$$W_{V_1 V_2} = W_{V_+ V_-} \begin{vmatrix} V_-(0) & V_+(0) \\ V_-(1) & V_+(1) \end{vmatrix} \stackrel{(4.38)}{=} \sqrt{2} (2^{s_m} - 2^{-s_m}) W_{V_+ V_-}.$$

При цьому за формулою Остроградського-Ліувіля

$$W_{V_+ V_-}(x) = W_{V_+ V_-}(0) \exp \left\{ - \int_0^x \frac{0 \cdot d\xi}{\xi^2 + 1} \right\} \equiv W_{V_+ V_-}(0).$$

Зважаючи на (4.38)  $W_{V_+ V_-}(0) = 2s_m$ , тож

$$W_{V_1 V_2} = 2^{3/2} s_m (2^{s_m} - 2^{-s_m}). \quad (4.41)$$

Запишемо за формулою (4.16)

$$U_m(x) = \frac{a_m}{W_{V_1 V_2}} \left[ V_2(x) \int_0^x \frac{V_1(\xi) h(\xi)}{(\xi+1)^2} d\xi + V_1(x) \int_x^1 \frac{V_2(\xi) h(\xi)}{(\xi+1)^2} d\xi \right]. \quad (4.42)$$

Формули (4.34) (основна) і (4.32), (4.33), (4.39) – (4.42) (пояснюючі) дають відповідь.  $\triangleright$

Розв'язати рівняння Пуассона в прямокутнику:

- |    |   |     |   |
|----|---|-----|---|
| 1. | $\begin{cases} \Delta u = x \cos y, \\ u(0, y) = 0, \quad u_x(a, y) = 4 \cos^3 y, \\ u_y(x, 0) = 0, \quad u(x, \pi/2) = 0. \end{cases}$   | 10. | $\begin{cases} \Delta u = 4 \cos^2(\pi x/8), \\ u_x(0, y) = y, \quad u(2, y) = y^2, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 1) = x. \end{cases}$   |
| 2. | $\begin{cases} \Delta u = f(y), \\ u_x(0, y) = 0, \quad u_x(a, y) = 0, \\ u(x, 0) = 2 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi x}{2a}, \\ u(x, b) = 2 \sin \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{3\pi x}{2a}. \end{cases}$ | 11. | $\begin{cases} \Delta u = \sin y - \cos y, \\ u_x(0, y) = \sin y, \quad u(\pi, y) = \cos y, \\ u(x, 0) = 1, \quad u(x, \pi) = -1. \end{cases}$  |
| 3. | $\begin{cases} \Delta u = x(\pi - y)/2, \\ u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 2 \sin y \cos 2y, \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, \pi) = 0. \end{cases}$   | 12. | $\begin{cases} \Delta u = y + x \sin y, \\ u_x(0, y) = 2 \sin y \cos 2y, \\ u_x(1, y) = 2 \cos y \sin 2y, \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, \pi) = \pi \cos^2 \pi x. \end{cases}$            |
| 4. | $\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u(0, y) = 0, \quad u_x(\pi/2, y) = 0, \\ u(x, 0) = x, \quad u(x, b) = 4 \sin^3 x. \end{cases}$  | 13. | $\begin{cases} \Delta u = x + y, \\ u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 1, \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = 1. \end{cases}$   |
| 5. | $\begin{cases} \Delta u = 2 \sin y \sin x, \\ u(0, y) = 0, \quad u(\pi/2, y) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_x(x, \pi/2) = 0. \end{cases}$   | 14. | $\begin{cases} \Delta u = -2e^{2x} \sin 2y, \\ u(0, y) = \sin(y/2) \cos(3y/2), \\ u(2, y) = \sin(3y/2) \cos(y/2), \\ u(x, 0) = \sin(\pi x/2), \\ u(x, \pi) = \sin \pi x. \end{cases}$ |
| 6. | $\begin{cases} \Delta u = e^x \cos y, \\ u(0, y) = 0, \\ u_x(\pi/2, y) + u(\pi/2, y) = 0, \\ u_y(x, 0) = 0, \quad u(x, \pi/2) = 0. \end{cases}$   | 15. | $\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u_x(0, y) = \sin \frac{2\pi y}{b}, \quad u(a, y) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \\ u(x, b) = 2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi x}{2a}. \end{cases}$         |
| 7. | $\begin{cases} \Delta u = -3x \cos y, \\ u_x(0, y) - u(0, y) = 1, \\ u(a, y) = 4a \cos^3 y, \\ u_y(x, 0) = 0, \quad u(x, \pi/2) = 0. \end{cases}$   | 16. | $\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u(0, y) = u_x(1, y) + hu(1, y) = 0, \\ u_y(x, 0) = x, \quad u(x, 1) = x. \end{cases}$   |
| 8. | $\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \\ u_y(x, \pm b) \pm hu(x, \pm b) = \pm 1. \end{cases}$   | 17. | $\begin{cases} \Delta u = 2(\sin x - x), \\ u(0, y) = 0, \quad u_x\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = y(1 - y), \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = 0. \end{cases}$                           |
| 9. | $\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = a, \\ u(x, 0) = x, \quad u(x, b) = 0. \end{cases}$   | 18. | $\begin{cases} \Delta u = \sin \frac{\pi y}{b}, \\ u(0, y) = 0, \quad u_x(a, y) = 0, \\ u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{2a}, \quad u(x, b) = \sin \frac{3\pi x}{2a}. \end{cases}$         |

Розв'язати рівняння Пуассона в необмеженій області:

- |     |  |     |   |
|-----|--|-----|---|
| 19. | $\begin{cases} \Delta u = 0 \quad (y > 0), \\ u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \\ u_y(x, 0) = 1, \quad u \text{ обмежена.} \end{cases}$ | 20. | $\begin{cases} \Delta u = \cos 2x \quad (y > 0), \\ u_x(0, y) = 0, \quad u_x(\pi, y) = 0, \\ u(x, 0) = \cos^2 x, \quad u \text{ обмежена.} \end{cases}$ |
|-----|--|-----|---|

21.  $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = 0 \quad (y > 0), \\ u_x(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \\ u_y(x, 0) - hu(x, 0) = \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi x}{2a}, \\ u \text{ обмежена.} \end{array} \right.$       23.  $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = 0 \quad (y > 0), \\ u(x, 0) = \operatorname{sgn} \sin x, \\ u \text{ обмежена.} \end{array} \right.$
22.  $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = 0, \\ u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = e^{-|y|}, \\ u \text{ обмежена.} \end{array} \right.$       24.  $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = \frac{\cos y}{\operatorname{ch} x}, \\ u \text{ обмежена.} \end{array} \right.$

Розв'язати крайову задачу:

25.  $\left\| \begin{array}{l} \Delta u + 2u = 0, \\ u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, \pi) = \varphi(x). \end{array} \right.$       26.  $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = x^2 u + \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right), \\ u \text{ обмежена.} \end{array} \right.$

Розв'язати рівняння Пуассона в прямокутному паралелепіпеді:

27.  $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = y, \\ u(0, y, z) = 0, \quad u(\pi, y, z) = 0, \\ u(x, 0, z) = 0, \quad u_y(x, \pi/2, z) = \sin x \cos z, \\ u_z(x, y, 0) = 0, \quad u_z(x, y, \pi) = 1. \end{array} \right.$

Розв'язати спектральну задачу в прямокутнику:

28.  $\left\| \begin{array}{l} \Delta u + \lambda u = 0, \\ u(0, y) = u(a, y) = 0, \\ u(x, 0) = u(x, b) = 0. \end{array} \right.$       29.  $\left\| \begin{array}{l} \Delta u + \lambda u = 0, \\ u(0, y) = u_x(a, y) = 0, \\ u_x(x, 0) = u(x, b) = 0. \end{array} \right.$

**30.** Розв'язати спектральну задачу  $\Delta u + \lambda u = 0$  в  $d$ -вимірному прямокутному паралелепіпеді з межовими умовами першого роду.

**31.** Розв'язати спектральну задачу  $\Delta u + \lambda u = 0$  в  $d$ -вимірному прямокутному паралелепіпеді з умовами періодичності на протилежних гранях.

**32.** Розв'язати спектральну задачу  $\Delta u + \lambda u = 0$  в прямокутному рівнобедреному трикутнику з межовими умовами першого роду.

**33.** Розв'язати рівняння Лапласа  $\Delta u = 0$  в прямокутному рівнобедреному трикутнику з однорідними межовими умовами першого роду на катетах і неоднорідною межевою умовою першого роду на гіпотенузі.

**34.** Задача 4.33 з неоднорідною межевою умовою другого роду на гіпотенузі.

**35.** Область  $D$  являє собою квадрат  $[-a, a]^2$ , з якого вилучено четверту частину — квадрат  $[-a, 0]^2$ . Показати, що методом відокремлення змінних можна знайти нескінченну кількість власних елементів (але не всі) спектральної задачі  $\Delta u + \lambda u = 0$  з межовими умовами першого роду в області  $D$ .

**36.** Для рівняння Пуассона  $\Delta u = f$  з однорідними межевими умовами першого роду в області  $D$ , заданій у задачі 4.35, вказати клас функцій  $f$ , для яких задача розв'язується методом відокремлення змінних, і знайти розв'язок.

**37.** Підібрати неперервну в прямокутнику  $[0, 1]^2$  і двічі неперервно диференційовну в його внутрішніх точках функцію  $w$ , яка задовольняє межові умови

$$w(0, y) = \chi_1(y), \quad w(1, y) = \chi_2(y), \quad w(x, 0) = w(x, 1) = 0,$$

де  $\chi_{1,2}$  – двічі неперервно диференційовні функції.

## § 5. Рівняння Пуассона в кругових областях

Розглядаємо чотири види кругових областей: круг, кільце, сектор круга і сектор кільця. Розв'язуючи крайову задачу для рівняння Пуассона  $\Delta u = F$  в одній з них, зручно перейти до полярних координат, у яких рівняння записується так:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = \rho F. \quad (5.1)$$

А це з точністю до позначень окремий випадок (4.1). Щоб пересвідчитися в цьому, покладаємо в (4.1)  $\sigma = 1$ ,  $\rho(x) = 1/x$ , у (4.4) –  $p(x) = x$ ,  $g = 1$ ,  $q = h = 0$ , після чого перепозначаємо  $x$  на  $\rho$  і  $y$  на  $\phi$ ; або ж, інакше розподіливши ролі, покладаємо  $\sigma(y) = 1/y$ ,  $\rho = 1$ ,  $p = 1$ ,  $g(y) = y$ ,  $q = h = 0$  і перепозначаємо  $x$  на  $\phi$ , а  $y$  на  $\rho$ . В обох способах позначення вільного члена замінюємо на  $\rho F$ . У результаті задача в круговій області з межевими умовами першого або другого роду повністю або частково зводиться до регулярної задачі (4.1) – (4.3) в прямокутнику<sup>4</sup>. Зведення повне, якщо область – сектор кільця. В інших трьох випадках виникають сингулярні межові умови (круг, сектор круга) або умова періодичності (круг, кільце). Остання дає готовий, відомий з математичного аналізу, базис для розкладання – основну тригонометричну систему, так що перший крок алгоритму відповідає. Проілюструємо це на прикладі задачі в крузі  $\rho < b$  для рівняння (5.1), у якому  $\int_0^b \int_0^{2\pi} |F(\rho, \phi)| \rho d\rho d\phi < \infty$ . Регулярна межева умова в крузі задається рівністю

$$\alpha u(b, \phi) + \beta u_\rho(b, \phi) = g(\phi), \quad (5.2)$$

де  $g$  – кусково неперервна функція, і вимогою неперервного прилягання  $u$  до кола. Сингулярною ж умовою є неперервна диференційовність шуканої функції у відкритому крузі. Ця властивість разом з періодичністю забезпечує поточкову по  $\rho < b$  і рівномірну по  $\phi \in [0, 2\pi]$  збіжність тригонометричного ряду Фур'є

$$u(\rho, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_m(\rho) \Phi_m(\phi), \quad (5.3)$$

<sup>4</sup>З умовами третього роду ситуація складніша: на сторонах кута з вершиною в початку координат  $\partial/\partial \mathbf{n} = \pm \rho^{-1} \partial/\partial \phi$ , тож при спробі зведення виявиться, що в (4.5) коефіцієнт при похідній по одній із змінних залежить від іншої змінної. Ця проблема не виникає на криволінійній частині межі, бо на колі  $\partial/\partial \mathbf{n} = \partial/\partial \rho$ .



де

$$\Phi_m(\phi) = \begin{cases} \cos m\phi, & m \geq 0, \\ \sin |m|\phi, & m < 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

Задача звелась до знаходження коефіцієнтів  $u_m(\rho)$ . Для цього розкладаємо в ряди (збіжні за нормою простору  $L_1[0, 2\pi]$ ) вільний член рівняння і праву частину межевої умови:

$$F(\rho, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m(\rho) \Phi_m(\phi), \quad (5.5)$$

$$g(\phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m \Phi_m(\phi). \quad (5.6)$$

Підставивши (5.3), (5.5) і (5.6) у (5.1) і (5.2), врахувавши, що  $\Phi_m'' = -m^2 \Phi_m$ , і прирівнявши коефіцієнти при  $\Phi_m$  у лівій і правій частинах рівностей, одержимо для кожної функції  $u_m(\rho)$  рівняння

$$\rho^2 u_m'' + \rho u_m' - m^2 u_m = \rho^2 F_m \quad (5.7)$$

і регулярну крайову умову

$$\alpha u_m(b) + \beta u_m'(b) = g_m. \quad (5.8)$$

Ці співвідношення разом із сингулярною умовою

$$u_m \in C^1[0, b] \quad (5.9)$$

визначають  $u_m$  однозначно.

**Зауваження.** До розкладів (5.3), (5.5) і (5.6) можна прийти і не спираючись на теорію тригонометричних рядів Фур'є, а зауваживши, що  $(\Phi_m)$  є системою власних функцій розв'язаної в прикладі 2.3 задачі ШЛ.

### Приклад 5.1 (задача в крузі)

$$\begin{cases} \Delta u = \rho^{-1} |\sin \phi|, \\ u(b, \phi) + b u_\rho(b, \phi) = 0. \end{cases}$$

◁ Функція  $|\sin \phi|$ , будучи парною, розкладається в ряд по самих тільки косинусах:

$$|\sin \phi| = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \frac{\Phi_m(\phi)}{\|\Phi_m\|^2} = \frac{c_0}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} c_m \cos m\phi,$$

де  $c_m = \int_0^{2\pi} |\sin \phi| \cos m\phi d\phi \equiv \int_{-\pi}^{\pi} |\sin \phi| \cos m\phi d\phi \equiv 2 \int_0^{\pi} \sin \phi \cos m\phi d\phi$ . Останній інтеграл дорівнює 0 при непарному  $m$  і  $4/(1-m^2)$  при парному. Таким чином,

$$|\sin \phi| = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos 2k\phi,$$

де

$$a_k = \frac{4}{\pi(1 + \delta_{k0})(1 - 4k^2)}. \quad (5.10)$$

Оскільки межова умова однорідна, то  $u(\rho, \cdot)$  розкладається по тих же базисних функціях, що й вільний член:

$$u(\rho, \phi) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(\rho) \cos 2k\phi \quad (5.11)$$

( $U_k$  – перепозначення  $u_{2k}$ ). Задача (5.7) – (5.9) конкретизується так:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho^2 U_k'' + \rho U_k' - 4k^2 U_k = a_k \rho, \\ U_k(b) + U_k'(b) = 0, \\ U_k \in C^1[0, b]. \end{array} \right.$$

Очевидно, диференціальне рівняння для  $U_k$  має частинний розв'язок, пропорційний  $\rho$ . Підбравши його, дістанемо загальний розв'язок:

$$U_k(\rho) = A_k \rho^{2k} + B_k \rho^{-2k} + a_k / (1 - 4k^2).$$

Із сингулярної умови маємо  $B_k = 0$ , після чого з крайової умови в точці  $b$  виражаємо  $A_k$  через  $a_k$ . Відтак, узявши до уваги (5.10), одержуємо

$$U_k(\rho) = \frac{1}{(1 + \delta_{k0})(4k^2 - 1)^2} \left[ \rho - \frac{\rho^{2k}}{(2k + 1)b^{2k}} \right].$$

Тепер рівність (5.11) стає відповіддю.  $\triangleright$

### Приклад 5.2 (задача в кільці)

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = \rho \sin \phi, \\ u(a, \phi) = \cos \phi, \quad u_\rho(b, \phi) = 1. \end{array} \right.$$

$\triangleleft$  Оскільки праві частини рівностей пропорційні відповідно  $\Phi_{-1}$ ,  $\Phi_1$ ,  $\Phi_0$ , то при  $|m| > 1$  крайова задача для  $u_m$  буде однорідною і матиме своїм розв'язком нуль. Таким чином, потрібно знайти тільки  $u_{-1}$ ,  $u_1$ ,  $u_0$ . Крайові задачі для них мають вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho^2 u_{-1}'' + \rho u_{-1}' - u_{-1} = \rho^3, \\ u_{-1}(a) = u_{-1}'(b) = 0; \\ \rho^2 u_1'' + \rho u_1' - u_1 = 0, \\ u_1(a) = 0, \quad u_1'(b) = 1; \\ \rho^2 u_0'' + \rho u_0' = 0, \\ u_0(a) = 1, \quad u_0'(b) = 0. \end{array} \right. \quad (5.12)$$

Легко підбирається частинний розв'язок  $\rho^3/8$  рівняння в (5.12). Після цього розв'язування всіх трьох задач не становить труднощів. Відпо-

відь:

$$u(\rho, \phi) = u_0(\rho) + u_1(\rho) \cos \phi + u_{-1}(\rho) \sin \phi = b \ln \frac{\rho}{a} + \frac{a(\rho + b^2 \rho^{-1})}{a^2 + b^2} \cos \phi + \left[ \frac{\rho^3}{8} + \frac{a^2 b^2 (3b^2 - a^2) \rho^{-1} - (a^4 + 3b^4) \rho}{8(a^2 + b^2)} \right] \sin \phi. \triangleright$$

**Приклад 5.3** (задача в секторі кільця з однорідними межовими умовами на відрізках)

$$\left\| \begin{array}{l} \Delta u = 0, \\ u(a, \phi) = 2 \sin \phi \cos 2\phi, \quad u(b, \phi) = 2 \cos \phi \sin 2\phi, \\ u(\rho, 0) = 0, \quad u_\phi(\rho, \pi/2) = 0. \end{array} \right.$$

$\triangleleft$  Це задача виду (4.1) – (4.3), за термінологією § 4 елементарна. До неї застосовний варіант б) наведеного в § 4 алгоритму. В ролі  $x$  тепер виступає  $\rho$ , а в ролі  $y$  –  $\phi$ .

1. Власними функціями задачі ШЛ

$$\left\| \begin{array}{l} \Phi'' = -\nu^2 \Phi, \\ \Phi(0) = 0, \quad \Phi'(\pi/2) = 0 \end{array} \right.$$

є, очевидно,  $\sin(2n+1)\phi$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ .

2. Вільний член рівняння дорівнює нулю, а праві частини межових умов на дугах є лінійними комбінаціями перших двох власних функцій:

$$\begin{aligned} 2 \sin \phi \cos 2\phi &= \sin 3\phi - \sin \phi, \\ 2 \cos \phi \sin 2\phi &= \sin 3\phi + \sin \phi. \end{aligned}$$

Тому й шукана функція комбінується з них же:

$$u(\rho, \phi) = u_0(\rho) \sin \phi + u_1(\rho) \sin 3\phi. \quad (5.13)$$

3. Розв'язавши стандартним чином крайові задачі

$$\left\| \begin{array}{l} \rho^2 u_0'' + \rho u_0' - u_0 = 0, \\ u_0(a) = -1, \quad u_0(b) = 1 \end{array} \right. \quad \text{і} \quad \left\| \begin{array}{l} \rho^2 u_1'' + \rho u_1' - 9u_1 = 0, \\ u_1(a) = 1, \quad u_1(b) = 1 \end{array} \right.$$

виду (4.10), знаходимо

$$u_0(\rho) = \frac{\rho - ab\rho^{-1}}{b - a}, \quad u_1(\rho) = \frac{\rho^3 + a^3 b^3 \rho^{-3}}{a^3 + b^3},$$

після чого рівність (5.13) стає відповіддю.  $\triangleright$

**Приклад 5.4** (задача в секторі кільця з однорідними межовими умовами на дугах)

$$\left\| \begin{array}{l} \Delta u = 0, \\ u(1, \phi) = 0, \quad u_\rho(e^{\pi/2}, \phi) = 0, \\ u(\rho, 0) = \sin \ln \rho, \quad u(\rho, \pi) = \sin(3 \ln \rho). \end{array} \right.$$

◁ Як і в попередньому прикладі, маємо елементарну задачу (4.1) – (4.3), але цього разу однорідними є межові умови по  $\rho$ . Тому застосовуємо варіант а) алгоритму, шукаючи формальний розв'язок у вигляді

$$u(\rho, \phi) = \sum_n u_n(\phi) R_n(\rho), \quad (5.14)$$

де  $R_n$  – власні функції задачі ШЛ

$$\left\| \begin{aligned} (\rho R')' &= -\nu^2 \rho^{-1} R, \\ R(1) &= 0, \quad R'(e^{\pi/2}) = 0 \end{aligned} \right.$$

(перепозначення (4.6)).

Переписавши рівняння для  $R$  у вигляді  $\rho^2 R'' + \rho R' - \nu^2 R = 0$ , бачимо, що загальний розв'язок його дається формулою

$$R(\rho) = \begin{cases} A + B \ln \rho, & \nu = 0, \\ A \cos(\nu \ln \rho) + B \sin(\nu \ln \rho), & \nu \neq 0. \end{cases} \quad (5.15)$$

Звідси, врахувавши крайові умови, знаходимо власні функції:

$$R_n(\rho) = \sin((2n+1) \ln \rho), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Оскільки рівняння для  $u$  однорідне, а праві частини межових умов по  $\phi$  співпадають з  $R_0$  і  $R_1$ , то й у (5.14) входять тільки ці дві власні функції:

$$u(\rho, \phi) = u_0(\phi) \sin \ln \rho + u_1(\phi) \sin(3 \ln \rho). \quad (5.16)$$

Розв'язавши, як у § 4, крайові задачі

$$\left\| \begin{aligned} u_0'' - u_0 &= 0, \\ u_0(0) &= 1, \quad u_0(\pi) = 0 \end{aligned} \right. \quad \text{і} \quad \left\| \begin{aligned} u_1'' - 9u_1 &= 0, \\ u_1(0) &= 0, \quad u_1(\pi) = 1 \end{aligned} \right.$$

виду (4.7), знаходимо

$$u_0(\phi) = \frac{\text{sh}(\pi - \phi)}{\text{sh} \pi}, \quad u_1(\phi) = \frac{\text{sh} 3\phi}{\text{sh} 3\pi},$$

що перетворює (5.16) на відповідь. ▷

**Приклад 5.5** (задача в секторі круга)

$$\left\| \begin{aligned} \Delta u &= 0, \\ u_\rho(b, \phi) &= 0, \\ u(\rho, 0) &= -\pi \rho, \quad u(\rho, \pi) = 0. \end{aligned} \right.$$

◁ Незважаючи на позірну схожість даної задачі з попередньою, розв'язувати її за тією ж схемою не можна. Це пояснюється тим, що в спектральній задачі

$$\left\| \begin{aligned} (\rho R')' &= -\nu^2 \rho^{-1} R, \\ R &\in C^1[0, b], \quad R'(b) = 0 \end{aligned} \right.$$

вагова функція не інтегровна на  $[0, b]$ , так що це не задача ШЛ. Вираз (5.15) загального розв'язку диференціального рівняння для  $R$  показує,

що вона взагалі не має власних функцій, крім сталої.

Якби межові на сторонах кута були однорідні, то можна було би (пор. з прикладом 5.3) побудувати формальний розв'язок у вигляді ряду по власних функціях задачі ШЛ

$$\left\| \begin{array}{l} \Phi'' = -\nu^2 \Phi, \\ \Phi(0) = 0, \quad \Phi(\pi) = 0. \end{array} \right. \quad (5.17)$$

Але ми вже вміємо робити межові умови по одній із змінних однорідними. Отож, шукаємо розв'язок у вигляді

$$u = v + w, \quad (5.18)$$

підпорядкувавши функцію  $w$  умовам

$$w(\rho, 0) = -\pi\rho, \quad w(\rho, \pi) = 0.$$

Підходить

$$w(\rho, \phi) = (\phi - \pi)\rho. \quad (5.19)$$

За такого вибору  $\Delta w = (\phi - \pi)/\rho$ ,  $w_\rho(b, \phi) = \phi - \pi$ , а значить  $v$  треба шукати як розв'язок задачі

$$\left\| \begin{array}{l} \Delta v = \rho^{-1}(\pi - \phi), \\ v_\rho(b, \phi) = \pi - \phi, \\ v(\rho, 0) = 0, \quad v(\rho, \pi) = 0, \end{array} \right.$$

до якої вже можна застосовувати МВЗ.

Власні функції  $\sin n\phi$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , задачі ШЛ (5.17) ми вже знайшли в прикладі 2.1. Тому шукаємо формальний розв'язок задачі для  $v$  у вигляді

$$v(\rho, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(\rho) \sin n\phi. \quad (5.20)$$

Записавши відомий з математичного аналізу розклад

$$\pi - \phi = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\phi}{n}, \quad 0 < \phi < 2\pi, \quad (5.21)$$

дістанемо для  $v_n$  крайову задачу

$$\left\| \begin{array}{l} \rho^2 v_n'' + \rho v_n' - n^2 v_n = 2\rho/n, \\ v_n'(b) = 2/n, \quad v_n \in C^1[0, b]. \end{array} \right.$$

При  $n \neq 1$  диференціальне рівняння має розв'язок, пропорційний вільному членові, але при  $n = 1$  кожна така функція задовольняє одне з рівняння і частинний розв'язок неоднорідного треба шукати у вигляді  $C\rho \ln \rho$ . Підібравши частинні розв'язки і міркуючи як у заключній частині прикладу 5.1, знаходимо

$$v_1(\rho) = \rho \left( 1 + \ln \frac{\rho}{b} \right), \quad v_n(\rho) = \frac{2b}{n^2 - 1} \left( \frac{\rho^n}{b^n} - \frac{\rho}{bn} \right), \quad n \geq 2.$$

Тепер рівності (5.18) – (5.20) дають відповідь.  $\triangleright$

Розв'язати рівняння Пуассона в круговій області:

$$1. \quad \begin{cases} \Delta u = \rho^{-1} \sin^2 \phi, \\ u(1, \phi) = \cos^2 \phi. \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} \Delta u = 5\rho \sin^2 \phi, \\ u(1, \phi) = \sin^4 \phi. \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} \Delta u = 0, \\ u_\rho(b, \phi) = g(\phi). \end{cases}$$

$$4. \quad \begin{cases} \Delta u = \rho \operatorname{sgn} \sin \phi, \\ u_\rho(1, \phi) + hu(1, \phi) = 0. \end{cases}$$

$$5. \quad \begin{cases} \Delta u = 0, \\ u(b, \phi) = \frac{1-b \cos \phi}{1-2b \cos \phi + b^2} \quad (b < 1). \end{cases}$$

$$6. \quad \begin{cases} \Delta u = \frac{\rho^{-1} \sin \phi}{1-2\rho \cos \phi + \rho^2}, \\ u_\rho(1, \phi) = 0. \end{cases}$$

$$7. \quad \begin{cases} \Delta u = 0, \\ u(1, \phi) = \ln |\cos(\phi/2)|. \end{cases}$$

$$8. \quad \begin{cases} \Delta u = 0, \\ u(a, \phi) = 2 \cos \phi \cos 3\phi, \\ u(b, \phi) = \cos 2\phi. \end{cases}$$

$$9. \quad \begin{cases} \Delta u = \rho^{-2} \sin \ln \rho \sin \phi, \\ u(1/2, \phi) = \sin \phi \cos 2\phi, \\ u(2, \phi) = \cos \phi \sin 2\phi. \end{cases}$$

$$10. \quad \begin{cases} \Delta u = (7/8)\rho^{-1}(2 + \ln \rho), \\ u_\rho(a, \phi) = \cos^4 \phi + \sin^2 \phi, \\ u(1, \phi) = \sin^4 \phi + \cos^2 \phi. \end{cases}$$

$$11. \quad \begin{cases} \Delta u = \rho^{-2} \ln \rho \sin(\phi/2) \quad (|\phi| < \pi), \\ u_\rho(a, \phi) = 0, \quad u_\rho(b, \phi) = 0. \end{cases}$$

$$12. \quad \begin{cases} \Delta u = 0, \\ u(1, \phi) = 0, \\ u_\rho(b, \phi) + hu(b, \phi) = |\sin(\phi/2)|. \end{cases}$$

$$13. \quad \begin{cases} \Delta u = 0, \\ u(\rho, 0) = 0, \quad u(\rho, \pi) = 0, \\ u(1, \phi) = 1. \end{cases}$$

$$14. \quad \begin{cases} \Delta u = 0, \\ u_\phi(\rho, 0) = 0, \quad u_\phi(\rho, \pi/2) = 0, \\ u(b, \phi) = \cos^2 \phi. \end{cases}$$

$$15. \quad \begin{cases} \Delta u = \pi - \phi, \\ u(\rho, 0) = 0, \quad u(\rho, \pi) = 0, \\ u(b, \phi) = 0. \end{cases}$$

$$16. \quad \begin{cases} \Delta u = 0, \\ u_\phi(\rho, 0) = 0, \quad u(\rho, \pi/2) = \rho^3, \\ u(1, \phi) = 1 + \cos \phi \cos 2\phi. \end{cases}$$

$$17. \quad \begin{cases} \Delta u = \rho(\sin 3\phi + \cos 3\phi), \\ u(\rho, \frac{\pi}{4}) = \rho, \quad u_\phi(\rho, \frac{3\pi}{4}) = -\rho, \\ u(1/\sqrt{2}, \phi) = \sin \phi. \end{cases}$$

$$18. \quad \begin{cases} \Delta u = 1 + \rho \cos \phi, \\ u_\phi(\rho, 0) = 1, \quad u(\rho, \frac{\pi}{2}) = \frac{\rho^2 - b^2}{4}, \\ u(b, \phi) = 0. \end{cases}$$

$$19. \quad \begin{cases} \Delta u = 0, \\ u_\phi(\rho, \pm\pi/2) = 0, \\ u(a, \phi) = \sin \phi, \quad u(b, \phi) = \cos 2\phi. \end{cases}$$

$$20. \quad \begin{cases} \Delta u = \sin 2\phi + \rho^{-1} \sin \phi, \\ u(\rho, 0) = 0, \quad u(\rho, \pi) = 0, \\ u(\frac{1}{2}, \phi) = \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{3\phi}{2}, \\ u_\rho(1, \phi) = \sin \phi. \end{cases}$$

$$21. \quad \begin{cases} \Delta u = 2\rho^{-3/2} \sin(3\phi/2), \\ u_\phi(\rho, \pm\pi/3) = 0, \\ u(a, \phi) = 2 \sin^2(3\phi/2), \\ u(b, \phi) = 0. \end{cases}$$

$$22. \quad \begin{cases} \Delta u = \rho^{-2} \sin \ln \rho \sin \phi, \\ u(\rho, -\pi) = 0, \quad u_\phi(\rho, \pi/2) = 0, \\ u(1, \phi) = 0, \quad u_\rho(b, \phi) = 0. \end{cases}$$

$$23. \quad \begin{cases} \Delta u = 0, \\ u(\rho, 0) = 0, \\ u(\rho, \pi/2) = \pi(\rho - 1), \\ u(1, \phi) = 0, \quad u(2, \phi) = 2\phi. \end{cases}$$

$$24. \quad \begin{cases} \Delta u = \rho^{-2} \sin \phi, \\ u(\rho, 0) = 0, \quad u_\phi(\rho, \pi) = \cos \ln \rho, \\ u_\rho(e^{-\pi}, \phi) = 0, \quad u_\rho(e^\pi, \phi) = 0. \end{cases}$$

Розв'язати рівняння Пуассона в необмеженій області:

25.  $\| \Delta u = e^{-\rho} \cos \phi, \quad u \text{ обмежена.}$
26.  $\| \Delta u = \rho^{-3} \ln \rho \sin^2 \phi \quad (\rho > 1),$   
 $u(1, \phi) = 1, \quad u \text{ обмежена.}$
27.  $\| \Delta u = f(\phi) \rho^{-\mu-2} \quad (\rho > 1),$   
 $u(1, \phi) = 0, \quad u \text{ обмежена}$   
 $(\mu - \text{додатний параметр}).$
28.  $\| \Delta u = 0 \quad (x, y > 0),$   
 $u(0, y) = e^{-y}, \quad u_y(x, 0) = 0,$   
 $u \text{ обмежена.}$
29.  $\| \Delta u = 0 \quad (x \in \mathbb{R}, y > 0),$   
 $u(x, 0) = \theta(1 - |x|),$   
 $u \text{ обмежена.}$

Розв'язати рівняння Гельмгольца:

30.  $\| \Delta u + k^2 u = \rho \cos \phi \quad (\rho < b),$   
 $u(b, \phi) = \operatorname{sgn} \phi \quad (|\phi| < \pi).$
31.  $\| \Delta u + k^2 u = 0,$   
 $u(a, \phi) = \sin \phi, \quad u(b, \phi) = \cos \phi.$

Розв'язати спектральну задачу:

32.  $\| \Delta u + \lambda u = 0 \quad (\rho < b),$   
 $u(b, \phi) = 0.$
33.  $\| \Delta u + \lambda u = 0 \quad (\rho < 1),$   
 $u(0, \phi) = u(\pi, \phi) = u_\rho(1, \phi) = 0.$

## § 6. Рівняння Пуассона у сферичних областях

Розглядаємо три види сферичних областей: кулю, сферичний шар і (в задачах) доповнення до кулі. У них зручно користуватися сферичними координатами  $r, \vartheta, \phi$  ( $\vartheta$  – широта, відраховувана від північного полюса,  $\phi$  – довгота). У цих координатах

$$\Delta = r^{-2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + r^{-2} \Delta_{\vartheta\phi}, \quad (6.1)$$

де

$$\Delta_{\vartheta\phi} = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

– оператор Лапласа на одиничній сфері, позначуваний традиційно  $S^2$ ; відтак рівняння Пуассона  $\Delta u = F$  набуває вигляду

$$r^2 u_{rr} + 2ru_r + \Delta_{\vartheta\phi} u = r^2 F. \quad (6.2)$$

Для крайових задач у сферичних областях МВЗ дещо видозмінюється. Тепер шукану і задані функції розкладають по власних функціях не задачі ШЛ, а спектральної задачі в частинних похідних

$$\| \Delta_{\vartheta\phi} Y = -\lambda Y,$$

$$Y \in C^1(S^2)$$

(друга умова включає й  $2\pi$ -періодичність  $Y(\vartheta, \cdot)$  і  $Y_\phi(\vartheta, \cdot)$ ). Вона має повну ортогональність відносно скалярного добутку

$$(f, g) = \int_{S^2} f \bar{g} d\sigma \equiv \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\vartheta, \phi) \overline{g(\vartheta, \phi)} \sin \vartheta d\vartheta d\phi$$

систему власних функцій ( $Y_{lm}$ ,  $l = 0, 1, \dots$ ;  $m = -l, \dots, l$ ), у якій функції з однаковим першим індексом відповідають одному власному значенню:

$$\Delta_{\vartheta\phi} Y_{lm} = -l(l+1)Y_{lm}. \quad (6.3)$$

Функції  $Y_{lm}$  називають *сферичними*.

Таким чином, неперервно диференційовний у сферичній області розв'язок рівняння (6.2) можна шукати у вигляді

$$u(r, \vartheta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l u_{lm}(r) Y_{lm}(\vartheta, \phi). \quad (6.4)$$

Нехай, для визначеності, область — куля. Розклавши по сферичних функціях вільний член рівняння і праву частину межевої умови

$$\alpha u(b, \vartheta, \phi) + \beta u_r(b, \vartheta, \phi) = g(\vartheta, \phi), \quad (6.5)$$

підставивши в (6.2) і (6.5) замість усіх функцій їхні розклади, взявши до уваги (6.3) і, насамкінець, прирівнявши коефіцієнти при однакових  $Y_{lm}$  зліва і справа, дістанемо для кожної  $u_{lm}$  крайову задачу

$$\left\{ \begin{array}{l} r^2 u''_{lm} + 2r u'_{lm} - l(l+1)u_{lm} = r^2 F_{lm}, \\ \alpha u_{lm}(b) + \beta u'_{lm}(b) = g_{lm}, \\ u_{lm} \in C^1[0, b]. \end{array} \right. \quad (6.6)$$

У сферичному шарі замість третьої, сингулярної, умови буде аналогічна другій, але в іншій точці, регулярна. У доповненні до кулі сингулярна умова включає, крім неперервної диференційовності, певне асимптотичне співвідношення на нескінченності. У найпростішому випадку рівняння Лапласа (6.2 з  $F = 0$ ) від  $u$  вимагається прямування до нуля і тоді останній рядок у (6.6) замінюється таким:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u_{lm}(r) = 0.$$

Сферичні функції виражаються через тригонометричні. Нагадаємо позначення:  $P_l$  —  $l$ -й многочлен Лежандра (приклад 2.4), ( $\Phi_m, m \in \mathbb{Z}$ ) — основна тригонометрична система. Останню можна на свій розсуд записувати як у дійсній формі (5.4), так і в комплексній:  $\Phi_m = e^{im\phi}$ . При  $0 \leq m \leq l$  позначимо

$$\Theta_{lm}(\vartheta) = P_l^{(m)}(\cos \vartheta) \sin^m \vartheta. \quad (6.7)$$

Тоді

$$Y_{lm}(\vartheta, \phi) = \Theta_{l|m|}(\vartheta) \Phi_m(\phi) \quad (6.8)$$

(ця рівність містить два варіанти виразу сферичної функції — дійсний і комплексний). Часом у правій частині дописують числовий множник (наприклад,



якщо хочуть, щоб норма сферичної функції як елемента простору  $L_2(S^2)$  дорівнювала одиниці). У зв'язку з цим нагадаємо, що в спектральній теорії нормування власних функцій неістотно (див. початок § 2). У математичній фізиці загальноприйнятим є “економний” вираз (6.8). За такого нормування

$$Y_{l0}(\vartheta) = P_l(\cos \vartheta) \quad (6.9)$$

( $Y_{l0}$ , як і  $\Phi_0$ , від  $\phi$  не залежить).

Випишемо перші шість функцій  $\Theta_{lm}$ . Із (2.23) маємо  $P_0 = 1$ ,  $P_1(x) = x$ ,  $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$ , звідки на підставі (6.7)  $\Theta_{00} = 1$ ,

$$\Theta_{10}(\vartheta) = \cos \vartheta, \quad \Theta_{11}(\vartheta) = \sin \vartheta, \quad (6.10)$$

$$\Theta_{20}(\vartheta) = (3 \cos^2 \vartheta - 1)/2, \quad \Theta_{21}(\vartheta) = 3 \cos \vartheta \sin \vartheta, \quad \Theta_{22}(\vartheta) = 3 \sin^2 \vartheta. \quad (6.11)$$

### Приклад 6.1

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0, \quad r < b, \\ u(b, \vartheta, \phi) = 6 \sin \vartheta \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cos \phi. \end{array} \right.$$

◁ Вибравши  $\Phi_m$  у дійсній формі і взявши до уваги (6.10), (6.11) і (6.8), перепишемо межу умову у вигляді

$$u(b, \vartheta, \phi) = 3Y_{11}(\vartheta, \phi) + Y_{21}(\vartheta, \phi).$$

Тому й  $u(r, \cdot, \cdot)$  є лінійною комбінацією цих двох сферичних функцій:

$$u(r, \vartheta, \phi) = u_{11}(r)Y_{11}(\vartheta, \phi) + u_{21}(r)Y_{21}(\vartheta, \phi). \quad (6.12)$$

Коефіцієнти розкладу шукаємо як розв'язок задачі (6.6):

$$\left\{ \begin{array}{l} r^2 u''_{11} + 2r u'_{11} - 2u_{11} = 0, \\ u_{11}(b) = 3, \quad u_{11} \in C^1[0, b]; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r^2 u''_{21} + 2r u'_{21} - 6u_{21} = 0, \\ u_{21}(b) = 1, \quad u_{21} \in C^1[0, b]. \end{array} \right.$$

Знайшовши звідси  $u_{11}(r) = 3r/b$ ,  $u_{21}(r) = (r/b)^2$ , перетворюємо (6.12) до вигляду

$$u(r, \vartheta, \phi) = (3r/b + (r/b)^2 \cos \vartheta) \sin \vartheta \cos \phi. \quad \triangleright$$

### Приклад 6.2

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = r^{-2} \ln r \cos \phi, \quad r > b, \\ u(a, \vartheta, \phi) = 0, \quad u_r(b, \vartheta, \phi) = 0. \end{array} \right.$$

◁ Оскільки  $\Phi_n \perp \Phi_m$  при  $n \neq m$ , то  $(\Phi_1, Y_{lm}) = 0$  при  $m \neq 1$ . Тому  $\Phi_1$  розкладається по функціях  $Y_{l1}$ :

$$\Phi_1 = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\Phi_1, Y_{l1})}{\|Y_{l1}\|^2} Y_{l1}. \quad (6.13)$$

Записавши на підставі (6.7) і (6.8)

$$(\Phi_1, Y_{l1}) = \int_0^\pi P'_l(\cos \vartheta) \sin^2 \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi \equiv -\pi \int_0^\pi P_l(\cos \vartheta) \cos \vartheta d\vartheta$$

і позначивши

$$c_l = -\frac{\pi}{\|Y_{l1}\|^2} \int_0^\pi P_l(\cos \vartheta) \cos \vartheta d\vartheta, \quad (6.14)$$

перетворюємо рівність (6.13) до вигляду  $\cos \phi = \sum_{l=1}^\infty c_l Y_{l1}(\vartheta, \phi)$ . Тоді й  $u(r, \cdot, \cdot)$  розкладається по функціях  $Y_{l1}$ :

$$u(r, \vartheta, \phi) = \cos \phi \sin \vartheta \sum_{l=1}^\infty u_l(r) P'_l(\cos \vartheta). \quad (6.15)$$

Для коефіцієнтів розкладу маємо задачу, аналогічну (6.6) (замість сингулярної умови з'являється ще одна регулярна):

$$\begin{cases} r^2 u_l'' + 2r u_l' - l(l+1)u_l = c_l \ln r, \\ u_l(a) = 0, \quad u_l'(b) = 0. \end{cases}$$

Частинний розв'язок диференціального рівняння шукаємо у вигляді  $c_l(\gamma_l \ln r + \delta_l)$ , де  $\gamma_l$  і  $\delta_l$  – сталі. Підставивши цей вираз у рівняння, знаходимо  $\gamma_l = -(l(l+1))^{-1}$ ,  $\delta_l = \gamma_l^2$  і записуємо загальний розв'язок

$$u_l(r) = c_l(l(l+1))^{-2} (A_l r^l + B_l r^{-l-1} - l(l+1) \ln r + 1). \quad (6.16)$$

Межові умови дають систему рівнянь

$$\begin{cases} a^l A_l + a^{-l-1} B_l = l(l+1) \ln a - 1, \\ lb^l A_l - (l+1)b^{-l-1} B_l = l(l+1), \end{cases}$$

відносно  $A_l$  і  $B_l$ , з якої знаходимо

$$\begin{aligned} A_l &= \frac{l(l+1) [(l+1)a^{l+1} \ln a + b^{l+1}] - (l+1)a^l}{(l+1)a^{2l+1} + lb^{2l+1}}, \\ B_l &= \frac{l(l+1) (b^{-l} - la^{-l} \ln a) - la^{-l}}{la^{-2l-1} + (l+1)b^{-2l-1}}. \end{aligned}$$

Тепер рівність (6.15) разом із (6.16) і (6.14) дає відповідь.  $\triangleright$

**Приклад 6.3.** Знайти потенціал, створюваний заземленою провідною сферою радіуса  $b$  і точковим зарядом величини  $q$ , розташованим на відстані  $a < b$  від центра сфери.

$\triangleleft$  Шукаємо розв'язок у вигляді

$$u = w + v, \quad (6.17)$$

де  $w$  – потенціал, створюваний точковим зарядом у вільному просторі. Функція  $v$  буде, очевидно, потенціалом у задачі без зарядів усередині сфери, але з відмінним від нуля значенням потенціалу на сфері (потенціал індукованих на сфері зарядів).

Направимо вісь  $z$  уздовж радіус-вектора точкового заряду. За зако-

ном Кулона  $w(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|}$ , або, в координатному записі,

$$w(r, \vartheta) = \frac{q}{\sqrt{a^2 - 2ar \cos \vartheta + r^2}} = \begin{cases} \frac{q}{a\sqrt{1 - 2\frac{r}{a} \cos \vartheta + \frac{r^2}{a^2}}}, & r \leq a, \\ \frac{q}{r\sqrt{1 - 2\frac{a}{r} \cos \vartheta + \frac{a^2}{r^2}}}, & r > a. \end{cases} \quad (6.18)$$

Із теорії спеціальних функцій відомий розклад<sup>5</sup> (див., наприклад, [24])

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l, \quad |x| \vee |t| < 1, \quad (6.19)$$

де  $P_l$  — многочлени Лежандра, введені в прикладі 2.4. Зважаючи на (6.19), перепишемо (6.18) у вигляді

$$w(r, \vartheta) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{a^{l+1}} P_l(\cos \vartheta), & r < a, \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \vartheta), & r > a. \end{cases} \quad (6.20)$$

Шукаємо спочатку потенціал у кулі (нижче ми покажемо, що зовні кулі він дорівнює нулю). Функція  $v$ , будучи потенціалом, гармонічна всередині кулі. Окрім того,  $v$  не залежить, очевидно, від сферичної координати  $\phi$  (довготи). Тому в її розкладі по сферичних функціях відсутні  $Y_{lm}$  з  $m \neq 0$  (бо вони залежать від  $\phi$ ), а є тільки  $Y_{l0}(\vartheta) = P_l(\cos \vartheta)$ . Таким чином,

$$v(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \vartheta), \quad r \leq b. \quad (6.21)$$

(Доданки виду  $B_l r^{-l-1} P_l(\cos \theta)$ , які також є гармонічними функціями, не можуть входити в розклад, оскільки не обмежені в околі нуля). Коефіцієнти  $A_l$  знаходяться з умови заземленості, яка математично виражається рівністю

$$w(b, \vartheta) + v(b, \vartheta) = 0. \quad (6.22)$$

Підставивши (6.20), (6.21) із  $r = b > a$  у (6.22) і прирівнявши до нуля коефіцієнти при  $P_l$ , дістаємо

$$A_l = -\frac{qa^l}{b^{2l+1}}. \quad (6.23)$$

---

<sup>5</sup>При  $t = 1$ ,  $|x| < 1$  ряд збігається умовно.

Це спільно з (6.17), (6.20), (6.21) дає такий вираз для  $u$

$$u(r, \vartheta) = \begin{cases} q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b^{2l+1} - a^{2l+1}}{a^{l+1}b^{2l+1}} r^l P_l(\cos \vartheta), & r < a, \\ q \sum_{l=0}^{\infty} a^l \frac{b^{2l+1} - r^{2l+1}}{r^{l+1}b^{2l+1}} P_l(\cos \vartheta), & a < r \leq b. \end{cases} \quad (6.24)$$

Далі,

$$v(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-l-1} P_l(\cos \vartheta), \quad r \geq b. \quad (6.25)$$

(Доданки з (6.21) не можуть входити в розклад потенціалу зовні кулі, оскільки вони не прямують до нуля при  $r \rightarrow \infty$ ). З умови (6.22) і рівностей (6.20) (нижній рядок), (6.17) знаходимо

$$B_l = -qa^l, \quad (6.26)$$

отже,

$$u(r, \vartheta) = 0, \quad r \geq b, \quad (6.27)$$

що і стверджувалося.

Ряд для  $v$  легко підсумовується. Для цього потрібно виконати у зворотному порядку дії, що привели від (6.18) до (6.20). А саме, при  $r \leq b$

$$v(r, \vartheta) = -\frac{q}{b} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{ar}{b^2}\right)^l P_l(\cos \vartheta) = -\frac{q}{b\sqrt{1 - \frac{2ar}{b^2} \cos \vartheta + \frac{a^2 r^2}{b^4}}}$$

(перша рівність спирається на (6.21) і (6.23), друга на (6.19)). Тотожно перетворивши останній вираз і взявши до уваги (6.17) і (6.18), одержимо для  $r \leq b$

$$u(r, \vartheta) = \frac{q}{\sqrt{r^2 - 2ar \cos \vartheta + a^2}} - \frac{q}{\sqrt{a^2 r^2 - 2b^2 ar \cos \vartheta + b^4}}. \quad (6.28)$$

Саме до такого виразу, рівносильного (6.24), приводить, обминаючи ряди, метод електростатичних зображень.

Відповідь: зовні кулі (6.27), усередині (6.24) або (6.28). ▽

Розв'язати рівняння Пуассона в кулі:

$$1. \quad \begin{cases} \Delta u = f(r) \sin \vartheta \sin \phi, \\ u(b, \vartheta, \phi) = 0. \end{cases}$$

$$4. \quad \begin{cases} \Delta u = 10r \sin \vartheta \sin(\phi - \phi_0), \\ u_r(1, \vartheta, \phi) = 2 \sin 2\vartheta \sin \phi. \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} \Delta u = 2r^{-2} \sin \ln r, \\ u(1, \vartheta, \phi) = \sin 2\vartheta \cos \phi. \end{cases}$$

$$5. \quad \begin{cases} \Delta u = 3f(r) \cos \vartheta, \\ u(1, \vartheta, \phi) = 3 \cos^2 \vartheta. \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} \Delta u = r^{-1} \ln r \sin^3 \vartheta \cos 3\phi, \\ u_r(1, \vartheta, \phi) = \sin \vartheta \sin 2\vartheta \sin 2\phi. \end{cases}$$

$$6. \quad \begin{cases} \Delta u = br^{-2} \ln r \sin \vartheta \sin \phi, \\ u_r(b, \vartheta, \phi) = \sin \vartheta \sin^2(\vartheta/2) \sin \phi. \end{cases}$$

7.  $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = r^{-3/2} \sin \vartheta \cos \phi, \\ u(1, \vartheta, \phi) = \cos^3 \vartheta. \end{array} \right.$
8.  $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = r \cos 3\vartheta, \\ u(1, \vartheta, \phi) = \sin 3\vartheta \sin \phi. \end{array} \right.$
9.  $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = 0, \\ u_r(b, \vartheta, \phi) + hu(b, \vartheta, \phi) = \\ 30 \cos^2(\vartheta/2) \sin^2 \vartheta \cos^2 \phi. \end{array} \right.$
10.  $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = 0, \\ u(b, \vartheta, \phi) = \cos 2\phi. \end{array} \right.$
11.  $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = f(r) \sin \vartheta, \\ u(1, \vartheta, \phi) = 0. \end{array} \right.$
12.  $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = 0, \\ u(b, \vartheta, \phi) = \operatorname{sgn}(\pi - \phi). \end{array} \right.$

Розв'язати рівняння Пуассона у сферичному шарі:

13.  $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = \cos \vartheta, \\ u_r(1, \vartheta, \phi) = 0, \\ u(2, \vartheta, \phi) = \sin \vartheta \sin \phi. \end{array} \right.$
14.  $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = \sin \vartheta \sin \phi, \\ u(1, \vartheta, \phi) = \cos \vartheta, \\ u_r(2, \vartheta, \phi) = \cos 2\vartheta. \end{array} \right.$
15.  $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = 2r^{-2} \cos \ln r, \\ u(a, \vartheta, \phi) = 0, \\ u(1/a, \vartheta, \phi) = \sin \vartheta \cos \phi. \end{array} \right.$
16.  $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = r^{-3}, \\ u(1/2, \vartheta, \phi) = \sin^2 \vartheta \cos^2 \phi, \\ u_r(1, \vartheta, \phi) = 0. \end{array} \right.$
17.  $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = 4r^{-2} \ln r \sin \vartheta \cos \phi, \\ u(1, \vartheta, \phi) = 5 \sin 2\vartheta \cos \phi, \\ u_r(2, \vartheta, \phi) = 0. \end{array} \right.$
18.  $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = 0, \\ u_r(1, \vartheta, \phi) - hu(a, \vartheta, \phi) = 3 \cos 2\vartheta, \\ u(2, \vartheta, \phi) = \cos \vartheta \sin 2\vartheta \cos \phi. \end{array} \right.$
19.  $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = f(r) \sin \vartheta \cos \phi, \\ u(a, \vartheta, \phi) = 1, \\ u(b, \vartheta, \phi) = 0. \end{array} \right.$
20.  $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = f(r) \cos \vartheta, \\ u_r(a, \vartheta, \phi) = 1, \\ u(b, \vartheta, \phi) = \cos \vartheta. \end{array} \right.$
21.  $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = 0, \\ u(a, \vartheta, \phi) = \cos \vartheta \cos 2\phi, \\ u(b, \vartheta, \phi) = \cos \vartheta \sin 2\phi. \end{array} \right.$
22.  $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = 0, \\ u(a, \vartheta, \phi) = |\cos \vartheta|, \\ u(b, \vartheta, \phi) = \cos \vartheta. \end{array} \right.$

Розв'язати рівняння Пуассона в доповненні до кулі:

23.  $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = r^{-3}, \\ u(1, \vartheta, \phi) = 1 - \cos \vartheta, \\ u(r, \vartheta, \phi) \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty. \end{array} \right.$
24.  $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = 0, \\ u(1, \vartheta, \phi) = \sin^2 \vartheta \sin^2 \phi, \\ u(r, \vartheta, \phi) \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty. \end{array} \right.$
25.  $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = f(r) \cos \vartheta, \\ u(a, \vartheta, \phi) = 0, \\ u(r, \vartheta, \phi) \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty. \end{array} \right.$
26.  $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = r^{-2} \cos \vartheta + e^{1-r}, \\ u(1, \vartheta, \phi) = 3, \\ u(r, \vartheta, \phi) = r \sin \vartheta \cos \phi + o(1) \\ \text{при } r \rightarrow \infty. \end{array} \right.$

Розв'язати рівняння Пуассона:

27.  $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = (1 + r^2)^{-2}, \\ u(r, \vartheta, \phi) \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty. \end{array} \right.$
28.  $\left\| \begin{array}{l} \Delta u = \sin r \sin \vartheta \sin \phi, \\ u \text{ обмежена.} \end{array} \right.$

$$\begin{aligned}
 29. \quad & \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \quad (r < 1, \vartheta < \pi/2), \\ u(1, \vartheta, \phi) = 0, \quad u(r, \pi/2, \phi) = 1. \end{array} \right. \\
 30. \quad & \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = e^{-r} r^2 \cos^2 \vartheta \quad (\vartheta < \pi/2), \\ u(r, \pi/2, \phi) = 0, \quad u \text{ обмежена.} \end{array} \right. \\
 31. \quad & \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \quad (x, y, z > 0), \\ u(0, y, z) = 0, \quad u(x, 0, z) = 0, \\ u(x, y, 0) = xyf(x^2 + y^2), \\ u \text{ обмежена.} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Розв'язати спектральну задачу в кулі:

$$32. \Delta u + \lambda = 0, \quad u(b, \vartheta, \phi) = 0. \qquad 33. \Delta u + \lambda = 0, \quad u_r(b, \vartheta, \phi) = 0.$$

34. Знайти потенціал, створюваний заземленою провідною сферою радіуса  $a$  і точковим зарядом величини  $q$ , поміщеним на відстані  $b > a$  від центра сфери.

35. Знайти потенціал, створюваний ізольованою зарядженою (повний заряд  $Q$ ) провідною сферою радіуса  $a$  і точковим зарядом величини  $q$ , поміщеним на відстані  $b > a$  від центра сфери.

## § 7. Рівняння Пуассона в циліндричних областях

Під циліндричною областю розуміємо декартів добуток кругової області (§ 5) і відрізка. Межа такої області складається щонайменше з трьох кусків, і на кожному задається своя межева умова. Достатньо вміти розв'язувати *елементарні задачі*, тобто такі (пор. з § 4), в яких межеві умови по двох із трьох змінних однорідні. Віднесемо задачу до першого типу, якщо ці змінні —  $\rho$  і  $\phi$ , до другого, якщо  $\phi$  і  $z$ , до третього, якщо  $\rho$  і  $z$ . Розглядаємо тут тільки перші два типи (задачі третього типу розібрано у [27]).

Почнемо з того, що наведемо означення і основні властивості виникаючих у задачах першого й другого типів спеціальних функцій.

Довільний розв'язок *рівняння Бесселя*

$$z^2 Z'' + zZ' + (z^2 - \nu^2)Z = 0 \quad (7.1)$$

відносно функції  $Z$  комплексної змінної  $z$  ( $\nu$  — параметр, який також може бути комплексним) називається *циліндричною функцією індексу* (або *порядку*)  $\nu$ . Фундаментальну систему розв'язків рівняння утворюють *функція Бесселя*

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(\nu + k + 1)} \quad (7.2)$$

і *функція Неймана*

$$N_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cos \pi \nu - J_{-\nu}(z)}{\sin \pi \nu}$$

(цей вираз визначений і при цілому значенні індексу, якщо під  $N_n(z)$  розуміти  $\lim_{\nu \rightarrow n} N_\nu(z)$ ). Функцію Неймана позначають іще  $Y_\nu$ . При нецілому  $\nu$  за фундаментальну систему розв'язків рівняння Бесселя можна взяти також  $J_\nu$

і  $J_{-\nu}$ , але при  $n \in \mathbb{Z}$   $J_{-n} = (-1)^n J_n$ . Далі розглядаємо циліндричні функції дійсного невід'ємного аргументу, який позначаємо  $\rho$ .

При  $\nu \geq 0$   $J_\nu$  обмежена в околі нуля ( $J_\nu(0) = 1 - \operatorname{sgn} \nu$ ), а  $N_\nu$  необмежена. На додатній півосі функція  $J_\nu$  має нескінченне число нулів, а на будь-якому відрізку — скінченне. Це означає, що додатні корені рівняння

$$J_\nu(\mu) = 0 \quad (7.3)$$

відносно  $\mu$  можна занумерувати за зростанням натуральними числами і така послідовність прямуватиме до нескінченності.

Нехай  $(Z_\nu, \nu \in \mathbb{R})$  — сім'я циліндричних функцій виду

$$Z_\nu = C_1 J_\nu + C_2 N_\nu,$$

де константи  $C_1$  і  $C_2$  від  $\nu$  не залежать. Тоді справджуються основні рекурентні співвідношення

$$Z_{\nu-1}(\rho) + Z_{\nu+1}(\rho) = 2\nu\rho^{-1}Z_\nu(\rho), \quad (7.4)$$

$$Z_{\nu-1} - Z_{\nu+1} = 2Z'_\nu, \quad (7.5)$$

з яких виводяться всі інші, зокрема,

$$J'_0 = -J_1, \quad (7.6)$$

$$(\rho^\nu J_\nu(\rho))' = \rho^\nu J_{\nu-1}(\rho). \quad (7.7)$$

Із (7.2) маємо

$$J_{\frac{1}{2}}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \sin \rho, \quad J_{-\frac{1}{2}}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \cos \rho. \quad (7.8)$$

Це разом із (7.4) показує, що бesselеві функції півцілого порядку елементарні.

При  $\lambda \neq 0$  рівняння

$$\rho^2 R'' + \rho R' + (\lambda\rho^2 - \nu^2)R = 0 \quad (7.9)$$

заміною  $R(\rho) = Z(\sqrt{\lambda}\rho)$  зводиться до (7.1) і, таким чином, загальний розв'язок його дається формулою

$$R(\rho) = AJ_\nu(\sqrt{\lambda}\rho) + BN_\nu(\sqrt{\lambda}\rho), \quad (7.10)$$

де  $A$  і  $B$  — довільні сталі. Зокрема, при  $\nu \geq 0$ ,  $\omega > 0$  обмежений в околі нуля комплексний розв'язок рівняння

$$\rho^2 V'' + \rho V' - (\omega^2 \rho^2 + \nu^2)V = 0 \quad (7.11)$$

має вигляд

$$V(\rho) = CJ_\nu(i\omega\rho), \quad (7.12)$$

де  $C$  — комплексна стала. Підставивши в (7.2)  $z = i\omega\rho$ , і вибравши головну вітку степеневої функції (так що  $i^\nu = e^{\pi\nu i/2}$ ), бачимо, що значення функції

$V$  будуть дійсними на  $\mathbb{R}_+$ , якщо  $C = e^{-\pi\nu i/2}$ . При  $\omega = 1$  задана рівністю (7.12) із таким  $C$  функція називається *модифікованою функцією Бесселя* і позначається  $I_\nu$ . За побудовою вона задовольняє рівняння (7.11) з  $\omega = 1$ . Також за побудовою

$$I_\nu(\rho) = e^{-\pi\nu i/2} J_\nu(i\rho), \quad (7.13)$$

що разом із (7.2) дає зображення  $I_\nu$  у вигляді степеневого ряду (виписить самостійно) і породжує аналоги формул (7.4) – (7.8):

$$\begin{aligned} I_{\nu-1}(\rho) - I_{\nu+1}(\rho) &= 2\nu\rho^{-1}I_\nu(\rho), \\ I_{\nu-1} + I_{\nu+1} &= 2I'_\nu, \\ I'_0 &= I_1, \end{aligned} \quad (7.14)$$

$$(\rho^\nu I_\nu(\rho))' = \rho^\nu I_{\nu-1}(\rho), \quad (7.15)$$

$$I_{\frac{1}{2}}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \operatorname{sh} \rho, \quad I_{-\frac{1}{2}}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \operatorname{ch} \rho.$$

Через модифіковані бesselеві функції виражається чимало інтегралів. Зокрема,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{a \cos \phi} \cos n\phi d\phi \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{a \cos \phi} \cos n\phi d\phi = I_n(a), \quad a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}, \quad (7.16)$$

$$\int_0^{\pi} e^{\alpha \cos \vartheta} \sin^n \vartheta d\vartheta = \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{n/2} I_{\frac{n}{2}}(\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{Z}_+. \quad (7.17)$$

Ще один розв'язок рівняння (7.11) з  $\omega = 1$  – *функція Макдональда*

$$K_\nu(\rho) = \frac{\pi (I_{-\nu}(\rho) - I_\nu(\rho))}{2 \sin \pi \nu}$$

(при  $n \in \mathbb{Z}$   $K_n(\rho)$  слід розуміти як  $\lim_{\nu \rightarrow n} K_\nu(\rho)$ ). Очевидно, вона необмежена в околі нуля. Має місце рівність

$$W_{I_\nu K_\nu}(\rho) = -\frac{1}{\rho}. \quad (7.18)$$

Відмінність вронскіана від нуля показує, що ці дві функції утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (7.11) з  $\omega = 1$ . Тоді при довільному  $\omega > 0$  цю ж властивість мають  $I_\nu(\omega\rho)$  і  $K_\nu(\omega\rho)$ .

Нагадаємо насамкінець, що в циліндричних координатах рівняння Пуассона  $\Delta u = F$  записується так:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \rho F. \quad (7.19)$$

**Приклад 7.1** (задача першого типу в секторі циліндра)

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = \rho^3 z \sin 3\phi, \quad \rho < b, \quad 0 < \phi < \pi/2, \quad 0 < z < l, \\ u(b, \phi, z) = 0, \\ u(\rho, 0, z) = 0, \quad u_\phi(\rho, \pi/2, z) = 0, \\ u(\rho, \phi, 0) = \rho^3 \sin \phi, \quad u(\rho, \phi, l) = 0. \end{array} \right.$$



◁ **Перше відокремлення.** Шукаємо розв'язок як суму ряду по власних функціях задачі ШЛ

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi'' = -\nu^2 \Phi, \\ \Phi(0) = 0, \quad \Phi'(\pi/2) = 0. \end{array} \right.$$

Такими є, очевидно, функції  $\sin(2n+1)\phi$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ . У розклад шуканої функції входять тільки ті з них, які фігурують у розкладах вільного члена і межових умов:

$$u(\rho, \phi, z) = u_0(\rho, z) \sin \phi + u_1(\rho, z) \sin 3\phi. \quad (7.20)$$

Введемо диференціальні оператори

$$L_n = \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \frac{(2n+1)^2}{\rho}, \quad M = -\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (7.21)$$

Підставивши (7.20) у (7.19) з  $F(\phi) = \rho \sin 3\phi$  і врахувавши межові умови, а також умову неперервності диференційовності  $u$ , дістанемо для кожного з коефіцієнтів розкладу крайову задачу в частинних похідних

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho M u_n = L_n u_n - \rho^4 z \delta_{n1}, \\ u_n(\cdot, z) \in C^1[0, b], \quad u_n(b, z) = 0, \\ u_n(\rho, 0) = \rho^3 \delta_{n0}, \quad u_n(\rho, l) = 0. \end{array} \right. \quad (7.22)$$

**Друге відокремлення.** Диференціальне рівняння в задачі (7.22) є, з точністю до позначень, окремий випадок (3.1). Тому можемо діяти як у § 3, шукаючи  $u_n(\cdot, z)$  у вигляді суми ряду по власних функціях задачі ШЛ

$$\left\{ \begin{array}{l} L_n R_n = -\lambda \rho R_n, \\ R_n \in C^1[0, b], \quad R_n(b) = 0. \end{array} \right. \quad (7.23)$$

**Зауваження 1.** У цьому записі індекс нумерує не власні функції, а самі задачі.

**Зауваження 2.** Символ  $\rho$  в правій частині рівняння означає як незалежну змінну, так і те, що означав у параграфах 2 і 3, – вагову функцію. У даному разі вона дорівнює своєму аргументові.

Вираз (7.21) оператора  $L_n$  показує, що диференціальне рівняння задачі (7.23) – окремий випадок ( $\nu = 2n+1$ ) (7.9). При  $\lambda = 0$  це рівняння Ейлера, загальний розв'язок якого дається формулою

$$R(\rho) = A\rho^{2n+1} + B\rho^{-2n-1}.$$

Така функція задовольняє обидві додаткові умови тільки при  $A = B = 0$ . Тому нуль не є власним числом задачі (7.23).

При  $\lambda > 0$  загальний розв'язок диференціального рівняння дається формулою (7.10) з  $\nu = 2n+1$ , а значить обмежений на  $[0, b]$  розв'язок пропорційний функції

$$R_n(\rho) = J_{2n+1}(\sqrt{\lambda}\rho). \quad (7.24)$$

Позначимо  $\mu_{nm}$   $m$ -й у порядку зростання корінь рівняння  $J_n(\mu) = 0$

(окремий випадок (7.3)). Тоді з (7.24) і крайової умови для  $R_n(b)$  знаходимо власні числа

$$\lambda_{nm} = (\mu_{2n+1,m}/b)^2 \quad (7.25)$$

і власні функції

$$R_{nm}(\rho) = J_{2n+1} \left( \frac{\mu_{2n+1,m}}{b} \rho \right) \quad (7.26)$$

задачі (7.23). За побудовою

$$\mathbf{L}_n R_{nm} = -\lambda_{nm} \rho R_{nm}. \quad (7.27)$$

Отже, задача звалась до знаходження коефіцієнтів розкладу

$$u_n(\rho, z) = \sum_{m=1}^{\infty} u_{nm}(z) R_{nm}(\rho), \quad (7.28)$$

який з урахуванням (7.26) перетворює рівність (7.20) до вигляду

$$u(\rho, \phi, z) = \sin \phi \sum_{m=1}^{\infty} u_{1m}(z) J_1 \left( \frac{\mu_{1m}}{b} \rho \right) + \sin 3\phi \sum_{m=1}^{\infty} u_{3m}(z) J_3 \left( \frac{\mu_{3m}}{b} \rho \right). \quad (7.29)$$

Щоб одержати крайові задачі для них, потрібно попередньо розкласти поділений на  $\rho$  вільний член рівняння для  $u_n$  і праву частину неоднорідної межевої умови.

За теоремою повноти (§ 2) будь-яка функція  $f \in L_2([0, b], \rho)$  розкладається в збіжний у середньому квадратичному ряд

$$f = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{nm}}{\|R_{nm}\|^2} R_{nm},$$

де  $c_{nm} = \int_0^b f(\rho) R_{nm}(\rho) \rho d\rho$  (зверніть увагу на множник  $\rho$ ). У нашому випадку треба розкласти функцію  $\rho^3$  (вона ж  $\rho^4/\rho$ ) спочатку по  $R_{3m}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , а потім по  $R_{1m}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Записавши на підставі (7.7) для довільного  $a > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^b \rho^4 J_3(a\rho) d\rho &\equiv a^{-5} \int_0^{ab} r^4 J_3(r) dr = a^{-1} b^4 J_4(ab), \\ \int_0^b \rho^4 J_1(a\rho) d\rho &\equiv a^{-5} \int_0^{ab} r^4 J_1(r) dr = a^{-5} \int_0^{ab} r^2 d(r^2 J_2(r)) \\ &= a^{-1} b^4 J_2(ab) - 2a^{-5} \int_0^{ab} r^3 J_2(r) dr = a^{-1} b^4 J_2(ab) - 2a^{-2} b^3 J_3(ab) \end{aligned}$$

і взявши до уваги (7.26), одержимо

$$\rho^3 = \sum_{m=1}^{\infty} A_m R_{3m}(\rho), \quad \rho^3 = \sum_{m=1}^{\infty} B_m R_{1m}(\rho), \quad (7.30)$$

де

$$A_m = \frac{b^4 J_4(\mu_{3m})}{\mu_{3m} \|R_{3m}\|^2}, \quad B_m = \frac{b^5 (\mu_{1m} J_2(\mu_{1m}) - J_3(\mu_{1m}))}{\mu_{1m}^2 \|R_{1m}\|^2}. \quad (7.31)$$

(Формула (7.30) не стверджує поточкові рівності лівих і правих частин! Це видно хоча би з того, що при  $\rho = b$  кожний член як першого, так і другого ряду дорівнює нулю).

Підставивши розклади (7.28) і (7.30) у (7.22), прирівнявши коефіцієнти при однакових базисних функціях у лівих і правих частинах і врахувавши вираз (7.21) оператора  $M$ , одержимо крайові задачі

$$\begin{cases} u''_{nm} - b^{-2} \mu_{nm}^2 u_{nm} = A_m \delta_{n1} z, \\ u_{nm}(0) = B_m \delta_{n3}, \quad u_{nm}(l) = 0, \end{cases}$$

розв'язки яких при  $n = 1$  і  $n = 3$  очевидні:

$$u_{1m}(z) = \frac{b A_m}{\mu_{1m}^2} \left( \frac{l \operatorname{sh}(\mu_{1m} z/b)}{\operatorname{sh}(\mu_{1m} l/b)} - z \right), \quad u_{3m}(z) = \frac{B_m \operatorname{sh}(\mu_{3m}(l-z)/b)}{\operatorname{sh}(\mu_{3m} l/b)}.$$

Ці рівності спільно з (7.31) перетворюють формулу (7.29) на відповідь. Її можна ще сконкретизувати, записавши за означенням норми в  $L_2([0, b], \rho)$  (див. § 2), а тоді за формулою (7.26)

$$\begin{aligned} \|R_{nm}\|^2 &= \int_0^b R_{nm}(\rho)^2 \rho d\rho = \int_0^b J_{2n+1} \left( \frac{\mu_{2n+1,m}}{b} \rho \right)^2 \rho d\rho \\ &\equiv \frac{b^3}{\mu_{2n+1,m}^3} \int_0^{\mu_{2n+1,m}} J_{2n+1}(r)^2 r dr. \end{aligned}$$

Обчислення останнього інтеграла — стороння для теми параграфа задача. Вирази квадратів норм власних функцій задачі ШЛ для рівняння (7.9) можна знайти в [11, 24]. ▸

**Приклад 7.2** (задача другого типу в циліндрі)

$$\begin{cases} \Delta u = Q(\rho)(1-2z), & \rho < b, \quad 0 < z < 1/2, \\ u(b, \phi, z) = e^{a \cos \phi} \cos \pi z, \\ u_z(\rho, \phi, 0) = 0, & u(\rho, \phi, 1/2) = 0. \end{cases}$$

Тут  $Q$  — функція з простору  $L_1([0, b], \rho)$ ,  $a$  — додатне число.

◁ Область зміни пари  $(\phi, z)$  є декартів добуток кола  $S^1$  і відрізка  $[0; 1/2]$ . Основна тригонометрична система  $(\Phi_n, n \in \mathbb{Z})$  ортогональна і

повна в  $L_2(S^1)$ , а система власних функцій задачі ШЛ

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega'' = -\omega_k^2 \Omega, \\ \Omega'(0) = 0, \quad \Omega(1/2) = 1 \end{array} \right.$$

(очевидно, такими є  $\Omega_k(z) = \cos \omega_k z$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ , де  $\omega_k = (2k+1)\pi$ ) має ці ж властивості в  $L_2([0; 1/2])$ . Тому система  $(\Phi_n \Omega_k, n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}_+)$  функцій двох змінних ортогональна в  $L_2(S^1 \times [0; 1/2])$ . Неважко довести й повноту її (див. аналогічне доведення для прямокутника в прикладі 1.8 [5]), але нам це не знадобиться. Просто шукатимемо розв'язок у вигляді

$$u(\rho, \phi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} U_{nk}(\rho) \Phi_n(\phi) \Omega_k(z) \quad (7.32)$$

(по  $n$  підсумовуємо від нуля, а не від  $-\infty$ , бо в постановку входять тільки парні по  $\phi$  функції). Якщо вдасться, підібравши коефіцієнти розкладу, задовольнити рівняння і додаткові умови, то задачу буде розв'язано.

Підставивши вираз (7.32) у рівняння (7.19) із таким як у задачі вільним членом, перетворимо останнє до вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ (\rho U'_{nk}(\rho))' - (\omega_k^2 \rho + n^2 \rho^{-1}) U_{nk}(\rho) \right] \Phi_n(\phi) \Omega_k(z) = \rho Q(\rho) (1 - 2z). \quad (7.33)$$

Очевидно,  $\|\Omega_k\|^2 = 1/2$ . Інтегруючи частинами (розбивати на доданки не потрібно), знаходимо  $\int_0^{1/2} (1 - 2z) \cos \omega_k z dz = 2/\omega_k^2$ , тож

$$1 - 2z = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \Omega_k(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{n0} A_k \Phi_n(\phi) \Omega_k(z), \quad (7.34)$$

де

$$A_k = \frac{4}{(2k+1)^2 \pi^2}. \quad (7.35)$$

Парна періодична функція розкладається по самих тільки косинусах, тому

$$e^{a \cos \phi} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos n\phi,$$

де

$$B_n = \frac{1}{\|\Phi_n\|^2} \int_{S^1} e^{a \cos \phi} \Phi_n(\phi) d\phi \equiv \frac{1}{\pi(1 + \delta_{n0})} \int_{-\pi}^{\pi} e^{a \cos \phi} \cos n\phi d\phi.$$

Тоді з формули (7.16) маємо

$$e^{a \cos \phi} = I_0(a) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(a) \cos n\phi. \quad (7.36)$$

Із (7.33) – (7.36), неперервності диференційовності  $u$  і неоднорідної межової умови для неї одержуємо для коефіцієнтів розкладу (7.32) крайові задачі

$$\left\| \begin{aligned} (\rho U'_{nk})' - (\omega_k^2 \rho + n^2 \rho^{-1}) U_{nk} &= \delta_{n0} A_k \rho Q(\rho), \\ U_{nk} \in C^1[0, b], \quad U_{nk}(b) &= \delta_{n0} (2 - \delta_{n0}) I_n(a). \end{aligned} \right.$$

При  $Q = 0$  диференціальне рівняння після домноження обох частин на  $\rho$  і перепозначення  $U_{nk}$  на  $V$  перетворюється в (7.11) ( $\nu = n$ ). Тому розв'язками од н о р і д н о г о рівняння є функції  $I_n(\omega_k \rho)$ ,  $K_n(\omega_k \rho)$  і всілякі лінійні комбінації їх. Із двох розв'язків

$$V_{nk1}(\rho) = I_n(\omega_k \rho), \quad (7.37)$$

$$V_{nk2}(\rho) = K_n(\omega_k b) I_n(\omega_k \rho) - I_n(\omega_k b) K_n(\omega_k \rho) \quad (7.38)$$

перший належить  $C^1[0, b]$  і відмінний від нуля в точці  $b$ , а другий необмежений в околі нуля і в точці  $b$  дорівнює нулю. Спираючись на (7.18), знаходимо (див. докладніше у [27, с. 118])

$$W_{V_{nk1} V_{nk2}}(\rho) = \frac{I_n(\omega_k b)}{\rho}. \quad (7.39)$$

Підставивши (7.37) – (7.39) у (4.16), одержимо після тотожних перетворень

$$\begin{aligned} U_{nk}(\rho) = & \delta_{k0} (2 - \delta_{n0}) I_n(a) + \delta_{n0} A_k \left[ \frac{I_n(\omega_k \rho)}{I_n(\omega_k b)} \int_0^b r Q(r) I_n(\omega_k r) dr \right. \\ & \left. - K_n(\omega_k \rho) \int_0^\rho r Q(r) I_n(\omega_k r) dr - I_n(\omega_k \rho) \int_\rho^b r Q(r) K_n(\omega_k r) dr \right], \end{aligned}$$

що спільно з (7.35) перетворює (7.32) до вигляду

$$\begin{aligned} u(\rho, \phi, z) = & \left( \frac{I_0(a)}{I_0(\pi b)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_n(a)}{I_n(\pi b)} \cos n\phi \right) \cos \pi z \\ & + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{I_0(\omega_k \rho)}{I_0(\omega_k b)} \int_0^b r Q(r) I_0(\omega_k r) dr - K_0(\omega_k \rho) \int_0^\rho r Q(r) I_0(\omega_k r) dr \right. \\ & \left. - I_0(\omega_k \rho) \int_\rho^b r Q(r) K_0(\omega_k r) dr \right] \frac{\cos \omega_k z}{(2k+1)^2}. \end{aligned}$$

Тут, нагадаємо,  $\omega_k = (2k+1)\pi$ .  $\triangleright$

Розв'язати рівняння Пуассона в циліндричній області:

$$1. \begin{cases} \Delta u = 1, \\ u(1, \phi, z) = 0, \\ u_z(\rho, \phi, 0) = \sin^2 \phi, \\ u_z(\rho, \phi, 1) = \cos^2 \phi. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \Delta u = f(z) \cos 2\phi, \\ u(b, \phi, z) = 0, \\ u(\rho, \phi, 0) = 0, \quad u_z(\rho, \phi, l) = 0. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \Delta u = 0, \\ u_\rho(b, \phi, z) = 0, \\ u_z(\rho, \phi, 0) = \rho^2 \sin^2 \phi, \\ u_z(\rho, \phi, l) = \cos^2 \phi. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \Delta u = e^z \rho^3 \cos^3 \phi, \\ u_\rho(b, \phi, z) + hu(b, \phi, z) = 0, \\ u(\rho, \phi, 0) = 0, \quad u_z(\rho, \phi, l) = 0. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \Delta u = 0, \\ u(b, \phi, z) = 0, \\ u(\rho, 0, z) = 0, \quad u(\rho, \pi, z) = 0, \\ u(\rho, \phi, 0) = 0, \quad u(\rho, \phi, l) = \rho \sin^3 \phi. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \Delta u = 0, \\ u(a, \phi, z) = 0, \quad u(b, \phi, z) = 0, \\ u_z(\rho, \phi, 0) = \rho^2, \quad u_z(\rho, \phi, l) = 0. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \Delta u = \rho^4 \cos^2 \phi \operatorname{ch} z, \\ u(a, \phi, z) = 0, \quad u_\rho(b, \phi, z) = 0, \\ u_z(\rho, \phi, 0) = 0, \quad u(\rho, \phi, l) = 0. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \Delta u = 0, \\ u(b, \phi, z) = 0, \\ u(\rho, 0, z) = 0, \quad u_\phi(\rho, \pi, z) = 0, \\ u_z(\rho, \phi, 0) = \sqrt{\rho} \sin(\phi/2), \\ u(\rho, \phi, l) = 0. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \Delta u = \rho^{1/2} \cos(\phi/2) \operatorname{sh} z, \\ u_\rho(b, \phi, z) + hu(b, \phi, z) = 0, \\ u_\phi(\rho, 0, z) = 0, \quad u(\rho, \pi, z) = 0, \\ u(\rho, \phi, 0) = 0, \quad u(\rho, \phi, l) = 0. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \Delta u = \rho^2 \sin 2\phi \cos \pi z, \\ u_\rho(b, \phi, z) = 0, \\ u(\rho, 0, z) = 0, \quad u(\rho, \pi/2, z) = 0, \\ u_z(\rho, \phi, 0) = 0, \quad u_z(\rho, \phi, 1) = 0. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \Delta u = 0, \\ u(b, \phi, z) = 0, \\ u(\rho, 0, z) = 0, \quad u(\rho, 2\pi/3, z) = 0, \\ u(\rho, \phi, 0) = \rho^{1/2} \sin(3\phi/2), \\ u(\rho, \phi, l) = \rho^{3/2} \sin(3\phi/2). \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \Delta u = \rho^{3/2} \cos(3\phi/2) \sin(\pi z/2), \\ u_\rho(b, \phi, z) = 0, \\ u_\phi(\rho, 0, z) = 0, \quad u(\rho, \pi/3, z) = 0, \\ u(\rho, \phi, 0) = 0, \quad u_z(\rho, \phi, 1) = 0. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} \Delta u = 0, \\ u(a, \phi, z) = 0, \quad u(b, \phi, z) = 0, \\ u_\phi(\rho, 0, z) = 0, \quad u(\rho, \pi, z) = 0, \\ u_z(\rho, \phi, 0) - hu(\rho, \phi, 0) = \sqrt{\rho} \cos \frac{\phi}{2}, \\ u(\rho, \phi, l) = 0. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} \Delta u = \sin 2\phi, \\ u(a, \phi, z) = 0, \quad u(b, \phi, z) = 0, \\ u(\rho, 0, z) = 0, \quad u(\rho, \pi/2, z) = 0, \\ u(\rho, \phi, 0) = \rho^2 \sin 2\phi, \\ u_z(\rho, \phi, l) + hu(\rho, \phi, l) = 0. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} \Delta u = 0, \\ u(a, \phi, z) = 0, \quad u(b, \phi, z) = 0, \\ u_\phi(\rho, 0, z) = 0, \quad u_\phi(\rho, 2\pi/3, z) = 0, \\ u(\rho, \phi, 0) = \sqrt{\rho} \cos(3\phi/2), \\ u(\rho, \phi, l) = 0. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} \Delta u = \sqrt{\rho} z \sin(3\phi/2), \\ u(a, \phi, z) = 0, \quad u(b, \phi, z) = 0, \\ u(\rho, 0, z) = 0, \quad u_\phi(\rho, \pi/3, z) = 0, \\ u_z(\rho, \phi, 0) = 0, \quad u(\rho, \phi, l) = 0. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} \Delta u = 0, \\ u(1, \phi, z) = 1, \\ u_z(\rho, \phi, 0) = 0, \quad u(\rho, \phi, 1) = 0. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} \Delta u = f(\rho) \cos(\pi z/l), \\ u(b, \phi, z) = \cos \phi, \\ u_z(\rho, \phi, 0) = 0, \quad u_z(\rho, \phi, l) = 0. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} \Delta u = 0, \\ u_\rho(b, \phi, z) + u(b, \phi, z) = \\ \quad \cos \phi \sin \pi z \cos 2\pi z, \\ u(\rho, \phi, 0) = 0, \quad u(\rho, \phi, 1) = 0. \end{cases}$$

20.  $\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0, \\ u(b, \phi, z) = \sin \phi \sin^2 \pi z, \\ u_z(\rho, \phi, 0) = 0, \quad u_z(\rho, \phi, 1) = 0. \end{array} \right.$
21.  $\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = f(\rho) \cos^2 \phi, \\ u_\rho(b, \phi, z) = 8 \sin^2 \phi \sin^3 z, \\ u(\rho, \phi, 0) = 0, \quad u_z(\rho, \phi, \pi/2) = 0. \end{array} \right.$
22.  $\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0, \\ u_\rho(a, \phi, z) - cu(a, \phi, z) = 0, \\ u(b, \phi, z) = (2 - \cos \phi)^{-1} \sin(z/2), \\ u_z(\rho, \phi, 0) = 0, \quad u(\rho, \phi, 1) = 0. \end{array} \right.$
23.  $\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = \rho \sin \phi \sin \pi z, \\ u_\rho(a, \phi, z) = (1 - z) \cos \phi, \\ u(b, \phi, z) = 0, \\ u(\rho, \phi, 0) = 0, \quad u(\rho, \phi, 1) = 0. \end{array} \right.$
24.  $\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = f(\rho) \sin 2\phi \cos z \cos 2z, \\ u(a, \phi, z) = 0, \quad u(b, \phi, z) = 0, \\ u_z(\rho, \phi, 0) = 0, \quad u(\rho, \phi, \pi/2) = 0. \end{array} \right.$
25.  $\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0, \\ u(b, \phi, z) = 2 \sin 4\phi \sin \pi z, \\ u(\rho, 0, z) = 0, \quad u(\rho, \pi/2, z) = 0, \\ u_z(\rho, \phi, 0) = 0, \quad u(\rho, \phi, 1) = 0. \end{array} \right.$
26.  $\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0, \\ u(b, \phi, z) = g(z) \sin(\phi/2), \\ u(\rho, 0, z) = 0, \quad u_\phi(\rho, \pi, z) = 0, \\ u(\rho, \phi, 0) = 0, \quad u(\rho, \phi, l) = 0. \end{array} \right.$
27.  $\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0, \\ u_\rho(b, \phi, z) = \sin(3\phi/2) \cos(\pi z/2), \\ u(\rho, 0, z) = 0, \quad u(\rho, 2\pi/3, z) = 0, \\ u(\rho, \phi, 0) = 0, \quad u(\rho, \phi, 1) = 0. \end{array} \right.$
28.  $\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = \sqrt{\rho} \cos(3\phi/2), \\ u(b, \phi, z) = 0, \\ u_\phi(\rho, 0, z) = 0, \quad u(\rho, \pi/3, z) = 0, \\ u_z(\rho, \phi, 0) = 0, \quad u_z(\rho, \phi, 1) = 0. \end{array} \right.$
29.  $\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0, \\ u(a, \phi, z) = 0, \\ u(b, \phi, z) = \cos(\phi/2) \sin^4(\pi z/l), \\ u_\phi(\rho, 0, z) = 0, \quad u(\rho, \pi, z) = 0, \\ u_z(\rho, \phi, 0) = 0, \quad u_z(\rho, \phi, l) = 0. \end{array} \right.$
30.  $\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = \rho^{3/2} \sin 3\phi \operatorname{ch} z + \\ \rho^{1/2} \sin(3\phi/2) \sin(\pi z/2), \\ u(b, \phi, z) = 0, \\ u(\rho, 0, z) = 0, \quad u(\rho, 2\pi/3, z) = 0, \\ u(\rho, \phi, 0) = 0, \quad u_z(\rho, \phi, 1) = 0. \end{array} \right.$
31.  $\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0, \\ u(a, \phi, z) = \phi, \quad u(b, \phi, z) = 0, \\ u(\rho, 0, z) = 0, \quad u(\rho, \pi, z) = \pi, \\ u_z(\rho, \phi, 0) = 0, \quad u(\rho, \phi, l) = 0. \end{array} \right.$

Розв'язати рівняння Пуассона в необмеженій області:

32.  $\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \quad (\rho > 1), \\ u(1, \phi, z) = 0, \\ u(\rho, 0, z) = 0, \quad u_\phi(\rho, \pi/2, z) = 0, \\ u(\rho, \phi, 0) = 0, \quad u(\rho, \phi, 1) = \frac{\sin \phi}{\rho}, \\ u \text{ обмежена.} \end{array} \right.$
33.  $\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \quad (\rho < 1, z > 0), \\ u(1, \phi, z) = e^{-z}, \quad u_z(\rho, \phi, 0) = 0, \\ u \text{ обмежена.} \end{array} \right.$
34.  $\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0, \\ u_z(\rho, \phi, 0) = 0, \quad u(\rho, \phi, 1) = f(\rho), \\ u \text{ обмежена.} \end{array} \right.$
35.  $\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (x \in \mathbb{R}, y > 0), \\ u(x, 0, z) = zx^{-2}, \\ u(x, y, 0) = 0, \\ u_z(x, y, 1) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ u \text{ обмежена.} \end{array} \right.$

Розв'язати крайову задачу:

36.  $\Delta u - 4z^2 u = 4yz^2 e^{-z^2} / (x^2 + y^2).$

## Частина 2

# Метод функцій впливу

Нехай  $E, E_0, \dots, E_n$  – лінійні простори і для кожного  $j$  від нуля до  $n$  задано лінійний оператор  $A_j : E \rightarrow E_j$ . Припустимо, що для будь-якого  $f \in E_j$  задача

$$\begin{cases} A_i u = 0, & i = 0, \dots, j-1, j+1, \dots, n, \\ A_j u = f_j \end{cases} \quad (*)$$

має єдиний розв'язок  $u_j$ . Очевидно, він лінійно залежить від  $f_j$ :  $u_j = B_j f_j$ , де  $B_j$  – деякий лінійний оператор з  $E_j$  в  $E$ . Тоді й задача

$$A_i u = f_i, \quad i = 0, \dots, n,$$

має єдиний розв'язок, який є сумою розв'язків задач (\*):

$$u = \sum_{j=0}^n B_j f_j.$$

Подивимось, як це конкретизується для лінійної диференціальної задачі (4.12). У ній  $n = 2$ ,  $E = C^2[b_1, b_2]$ ,  $E_0 = C^1[b_1, b_2]$ ,  $E_1 = E_2 = \mathbb{R}$  (перші два простори можна взяти й ширшими),  $A_0 = \Lambda$ ,  $f_0 = f$ ,  $A_j = Q_j$ ,  $f_j = c_j$  ( $j = 1, 2$ ). Вираз (4.14) розв'язку показує, що

$$B_0 f(x) = \int_{b_1}^{b_2} G(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

тобто  $B_0$  – фредгольмів інтегральний оператор, ядром якого є функція Гріна  $G$ . З огляду на написану рівність її ще називають функцією впливу вільного члена.

Перші два доданки в правій частині (4.14) не схожі на третій, але якщо додаткові умови в (4.12) межові і розщеплені, то й вони виражаються через функцію Гріна. Нехай, наприклад, обидві межові умови — першого роду:  $Q_j V = V(b_j)$ ,  $j = 1, 2$ . Якби  $V'_j(b_j) = 0$ , то функція  $V_j$  була би розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} \Lambda V = 0, \\ V_j(b_j) = 0, \quad V'_j(b_j) = 0, \end{cases}$$

а значить тотожним нулем, що суперечить (4.13). Отже,  $V'_j(b_j) \neq 0$ , що



разом із (4.15) дає

$$\frac{V_2(x)}{V_2(b_1)} = \frac{G'(x, b_1)}{G'(b_1 + 0, b_1)}, \quad \frac{V_1(x)}{V_1(b_2)} = \frac{G'(x, b_2)}{G'(b_2 - 0, b_2)}$$

(тут штрих означає диференціювання по другому аргументові). Аналогічно переконуємося, що у випадку межових умов другого роду

$$\frac{V_2(x)}{V_2'(b_1)} = \frac{G(x, b_1)}{G'(b_1, b_1 + 0)}, \quad \frac{V_1(x)}{V_1'(b_2)} = \frac{G(x, b_2)}{G'(b_2, b_2 - 0)}.$$

Таким чином, оператор  $B_j : \mathbb{R} \rightarrow C^2[b_1, b_2]$  переводить довільне число в добуток його на функцію, написану в правій частині одної з останніх чотирьох рівностей. Якщо розглядати пару чисел  $(c_1, c_2)$  як числову функцію на двоелементній множині (у даному разі — межі  $\partial D$  інтервалу  $D = ]b_1, b_2[$ ), то  $B_1 + B_2$  можна розглядати як оператор на  $\partial D$  і він буде, як і  $B_0$ , інтегральним (інтеграл по скінченній множині це сума). Виявляється, що і в загальній лінійній крайовій задачі для рівняння в частинних похідних впливи вільного члена і крайових (як межових, так і початкових) умов є результатами дії інтегральних операторів, ядра яких виражаються, для кожного з операторів по-своєму, через одну й ту саму функцію. Її називають, як і в теорії звичайних диференціальних рівнянь, *функцією Гріна* задачі. Ядром інтегрального оператора може бути або вона сама або результат дії на неї деякого диференціального оператора. Теорія узагальнених функцій, з основами якої ми знайомимо читача, дозволяє приписати смисл такому оператору, навіть якщо його ядро не є функцією в класичному розумінні.

## § 8. Узагальнені функції

Для  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d$  символ  $\partial^\alpha$  означає оператор диференціювання функції  $d$  скалярних змінних  $\alpha_i$  разів по  $i$ -й змінній,  $i = 1, \dots, d$ . Для  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  і  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$   $\mathbf{x}^\alpha$  означає *мультистепені*  $x_1^{\alpha_1} \times \dots \times x_d^{\alpha_d}$ . Щоб мати змогу записувати його як функцію від основи при фіксованому показнику, введемо ще позначення  $\mathbf{r}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\alpha$ .

Нехай  $\mathcal{R}$  — деякий лінійний простір нескінченно диференційовних функцій на  $\mathbb{R}^d$  такий, що для будь-яких  $\varphi \in \mathcal{R}$  і  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d$  функція  $\mathbf{r}_\alpha \partial^\beta \varphi$  також належить  $\mathcal{R}$ . Припустимо також, що в  $\mathcal{R}$  означено збіжність і згідно з цим означенням для будь-яких  $\varphi \in \mathcal{R}$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$  і збіжної до  $\varphi$  послідовності  $(\varphi_n)$  послідовність  $(\partial^\alpha \varphi_n)$  збігається до  $\partial^\alpha \varphi$ . Елементи простору  $\mathcal{R}$  називають *пробними* або *основними* функціями, а лінійні неперервні функціонали на ньому — *узагальненими функціями* або *розподілами*.

Вище сформульовано мінімальні вимоги до простору  $\mathcal{R}$  і збіжності в ньому. У тих двох просторах, які використовуються в математичній фізиці, і запас функцій, і поняття збіжності задаються ще й іншими вимогами. У першому з них, позначуваному  $\mathcal{D}$ , функції фінитні (тобто для кожної  $\varphi \in \mathcal{D}$  існує обмежена множина  $A \subset \mathbb{R}^d$  така, що  $\varphi(\mathbf{x}) = 0$  при  $\mathbf{x} \notin A$ ); у другому,  $\mathcal{S}$ , вони

задовольняють умову  $\forall m \in \mathbb{N} \forall \beta \in \mathbb{Z}_+^d \sup_{\mathbf{x}} |\mathbf{x}|^m |\partial^\beta \varphi(\mathbf{x})| < \infty$ , або, рівно-сильно,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d \sup_{\mathbf{x}} |\mathbf{x}^\alpha \partial^\beta \varphi(\mathbf{x})| < \infty$  (і ще два формулювання наведено в задачі 8.1). Означення збіжностей у  $\mathcal{D}$  і  $\mathcal{S}$  можна знайти в [11].

Значення розподілу  $f$  на пробній функції  $\varphi$  позначається  $(f, \varphi)$ . Узагальнені функції, зображувані у вигляді

$$(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (8.1)$$

де  $f$  у правій частині рівності – справжня функція, називаються *регулярними*, усі інші – *сингулярними*. Найважливішими прикладами останніх є  $\delta_{\mathbf{a}}$ ,  $\mathcal{P} \frac{1}{x-a}$ ,  $\frac{1}{x \pm i0}$ . Перша з них (її ще називають  $\delta$ -функцією) задається рівністю

$$(\delta_{\mathbf{a}}, \varphi) = \varphi(\mathbf{a}) \quad (8.2)$$

(при  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  пишуть просто  $\delta$ ). Другу і двоваріантну (з тим чи тим знаком) третю означимо для випадку  $d = 1$ :

$$\left( \mathcal{P} \frac{1}{x-a}, \varphi \right) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x-a} dx \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{a-N}^{a+N} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x-a} dx, \quad (8.3)$$

$$\left( \frac{1}{x \pm i0}, \varphi \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon} dx. \quad (8.4)$$

Поширений запис рівності (8.2) у вигляді

$$\int_{\mathbb{R}^d} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{a})$$

(спроба інтерпретувати узагальнену функцію  $\delta_{\mathbf{a}}$  як класичну) нестрогий, але містить раціональне зерно. А саме, неважко побудувати послідовність  $(f_n)$  функцій на  $\mathbb{R}^d$  таку, що для будь-якої обмеженої неперервної функції  $\varphi$

$$\varphi(\mathbf{a}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

(наприклад,  $f_n(\mathbf{x}) = n^d f(n(\mathbf{x} - \mathbf{a}))$ , де  $f$  – довільна неперервна густина одиничної маси, додатна при  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ). Тоді  $\delta_{\mathbf{a}}$  можна мислити як границю (але не в розумінні поточної збіжності) послідовності  $(f_n)$ . Це певною мірою виправдовує умовний запис  $\delta(\mathbf{x})$ , яким користуватимемось і ми.

Нехай  $\rho$  – така функція на  $\mathbb{R}^d$ , що для будь-якої  $\varphi \in \mathcal{R}$  функція  $\rho\varphi$  також належить  $\mathcal{R}$  (цю властивість має, наприклад, мультистепені). Тоді добуток узагальненої функції  $f$  на  $\rho$  означається так:

$$(\rho f, \varphi) = (f, \rho\varphi). \quad (8.5)$$

Для  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$  похідна  $\partial^\alpha f$  розподілу  $f$  означається як функціонал на  $\mathcal{R}$ , діючий за правилом

$$(\partial^\alpha f, \varphi) = (-1)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d} (f, \partial^\alpha \varphi). \quad (8.6)$$

З (8.6) і властивостей простору  $\mathcal{R}$  випливає лінійність і неперервність  $\partial^\alpha f$ .

Нижче  $\mathbf{k}\mathbf{x}$  означає скалярний добуток векторів  $\mathbf{k}$  та  $\mathbf{x}$ . Для довільних функцій  $g, h \in L_1(\mathbb{R}^d)$  позначимо

$$g * h(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} g(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) h(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \quad (8.7)$$

$$\hat{g}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (8.8)$$

$$\check{h}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} h(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (8.9)$$

Тоді, як відомо з математичного аналізу,

$$\check{\hat{g}} = g, \quad \hat{\check{h}} = h, \quad (8.10)$$

$$\widehat{g * h} = \hat{g} \hat{h}. \quad (8.11)$$

(Якщо  $\hat{g} \notin L_1$ , то в першій з рівностей (8.10) береться головне значення відповідаючого знакові  $\sim$  інтеграла; аналогічно інтерпретується друга рівність). Оператор  $\hat{\cdot}$  називається *перетворенням Фур'є*, а функція  $\hat{g}$  – *перетвором*<sup>1</sup> функції  $g$ . Оператор  $\sim$ , як видно з (8.10), обернений до  $\hat{\cdot}$ . Також із (8.8) – (8.10) випливає рівність

$$\hat{g} = (2\pi)^d \check{g}^\#, \quad (8.12)$$

де для довільної функції  $q$  позначено  $q^\#(x) = q(-x)$ .

Позначимо  $\hat{\mathcal{R}} = \{\hat{\varphi} : \varphi \in \mathcal{R}\}$  (розглядаємо тільки дійснозначні пробні функції) і означимо перетвір Фур'є узагальненої функції  $f$  як функціонал  $\hat{f}$  на  $\hat{\mathcal{R}}$ , діючий за правилом

$$(\hat{f}, \hat{\varphi}) = (2\pi)^d (f, \varphi^\#), \quad (8.13)$$

або, рівносильно,

$$(\hat{f}, \widehat{\varphi}) = (2\pi)^d (f, \varphi)$$

(тут риска означає комплексне спряження). Визначна властивість простору  $\mathcal{S}$  полягає в тому, що  $\hat{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$ . Це разом із (8.12) дозволяє у випадку  $\mathcal{R} = \mathcal{S}$  записати означення (8.13) у простішій формі

$$(\hat{f}, \varphi) = (f, \hat{\varphi}). \quad (8.14)$$

Справді, згідно з (8.12)  $\varphi = \hat{\psi}$ , де  $\psi = (2\pi)^{-d} \hat{\varphi}^\#$ . Тому з (8.13) маємо  $(\hat{f}, \varphi) = (f, \hat{\varphi}^\#) = (f, \hat{\varphi})$ .

---

<sup>1</sup> Див. згадані на стор. 34 словники, а також *Російсько-український математичний словник* (укладачі Ф. С. Гудименко, Й. Б. Погребиський, Г. Н. Сакович, М. А. Чайковський).

**Зауваження.** У випадку  $\mathcal{R} = \mathcal{D}$  загальноприйнятим є таке означення перетвору Фур'є:

$$(\hat{f}, \hat{\varphi}) = (2\pi)^d (f, \varphi).$$

Ми відступили від нього, бо для регулярної абсолютно інтегровної функції воно дає вираз перетвору  $\hat{f}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ , який відрізняється від правої частини (8.8) з  $g = f$  показником степеня.

Найважливіші властивості перетворення Фур'є такі:

$$\widehat{\partial^\alpha f} = (-i)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d} \rho_\alpha \hat{f}, \quad (8.15)$$

$$\widehat{\rho_\alpha f} = (-i)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d} \partial^\alpha \hat{f} \quad (8.16)$$

(нагадаємо, що  $\rho_\alpha(\mathbf{x})$  – це перепозначення  $\mathbf{x}^\alpha$ ).

**Приклад 8.1.** Довести *формулу Сохоцького*

$$\frac{1}{x \pm i0} = \mathcal{P} \frac{1}{x} \mp i\pi \delta(x). \quad (8.17)$$

◁ Записавши

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon} dx &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon} dx, \\ \int_{-N}^N \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon} dx &= \int_{-N}^N \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x \pm i\varepsilon} dx + \varphi(0) \int_{-N}^N \frac{x \mp i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} dx, \\ \int_{-N}^N \frac{x dx}{x^2 + \varepsilon^2} &= 0, \quad \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \varepsilon^2} = \pi, \end{aligned}$$

бачимо, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x \pm i\varepsilon} dx \mp i\pi \varphi(0).$$

Звідси, перейшовши до границі при  $\varepsilon \rightarrow +0$  і взявши до уваги (8.3) і (8.2) з  $a = 0$ , одержуємо (8.17). ▷

**Приклад 8.2.** Знайти добуток  $\delta$ -функції на функцію  $\rho$  таку, що множення на неї пробних функцій не виводить з  $\mathcal{R}$ .

◁ За формулами (8.5) і (8.2)

$$(\rho \delta_{\mathbf{a}}, \varphi) = (\delta_{\mathbf{a}}, \rho \varphi) = \rho(\mathbf{a}) \varphi(\mathbf{a}) = \rho(\mathbf{a}) (\delta_{\mathbf{a}}, \varphi) \equiv (\rho(\mathbf{a}) \delta_{\mathbf{a}}, \varphi).$$

Отже,  $\rho \delta_{\mathbf{a}} = \rho(\mathbf{a}) \delta_{\mathbf{a}}$ , тобто множення  $\delta_{\mathbf{a}}$  на функцію рівносильне множенню її на число — значення функції-множника в точці  $\mathbf{a}$ . ▷

**Приклад 8.3.** Знайти похідну функції Хевісайда  $\theta$ , рівної нулю на від'ємній півосі і одиниці на додатній.

◁ За формулою (8.1) і означенням  $\theta$

$$(\theta, \varphi) = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx$$

(тому й не було потреби задавати значення  $\theta$  в нулі). Замінивши тут  $\varphi$  на  $\varphi'$  і врахувавши, що для пробної функції  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$ , одержимо  $(\theta, \varphi') = -\varphi(0)$ . Але за означенням (8.6) похідної розподілу  $(\theta, \varphi') = -(\theta', \varphi)$  і, значить,  $(\theta', \varphi) = \varphi(0)$ , що разом із (8.2) дає  $\theta' = \delta$ . ▷

**Приклад 8.4.** Знайти похідну узагальненої функції  $\mathcal{P} \frac{1}{x-a}$ .

◁ Із (8.6) і (8.3)

$$\left( \left( \mathcal{P} \frac{1}{x-a} \right)', \varphi \right) = - \left( \mathcal{P} \frac{1}{x-a}, \varphi' \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{a-N}^{a+N} \frac{\varphi'(a) - \varphi'(x)}{x-a} dx.$$

Записавши підінтегральний вираз як  $(x-a)^{-1} d(\varphi(a) + \varphi'(a)(x-a) - \varphi(x))$  і проінтегрувавши частинами, бачимо, що

$$\begin{aligned} \left( \left( \mathcal{P} \frac{1}{x-a} \right)', \varphi \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \int_{a-N}^{a+N} \frac{\varphi(a) + \varphi'(a)(x-a) - \varphi(x)}{(x-a)^2} dx \right. \\ \left. + \frac{2\varphi(a) - \varphi(a-N) - \varphi(a+N)}{N} \right]. \end{aligned}$$

Отже,  $\left( \mathcal{P} \frac{1}{x-a} \right)' = -\mathcal{P} \frac{1}{(x-a)^2}$ , де

$$\left( \mathcal{P} \frac{1}{(x-a)^2}, \varphi \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(a) - \varphi'(a)(x-a)}{(x-a)^2} dx. \triangleright$$

**Приклад 8.5.** Знайти похідну  $2\pi$ -періодичної функції  $f$  такої, що

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} \text{ при } 0 < x < 2\pi.$$

◁ **Перший спосіб.** У точках  $2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , функція має такий самий стрибок, як функція Хевісайда, а на інтервалах неперервності має похідну в класичному розумінні, рівну  $-1/2$ . Це разом із виведеною в прикладі 8.3 формулою  $\theta' = \delta$  показує, що

$$f' = -\frac{1}{2} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{2k\pi}.$$

**Другий спосіб.** Продиференціювавши рівність (5.21), дістанемо з урахуванням  $2\pi$ -періодичності  $f$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$$

(звичайно, ця рівність не є поточною, бо при фіксованому  $x$  ряд у правій частині розбігається).

Порівняння одержаних двома способами виразів похідної приводить до цікавої рівності

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2k\pi).$$

Строгий еквівалент її такий: для будь-якої  $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(2k\pi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \cos nx dx.$$

Звідси, записавши праву частину як

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \cos nx dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \sin nx dx \right)$$

і пригадавши позначення (8.8), одержуємо *формулу Пуассона*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(2k\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(n). \triangleright$$

**Приклад 8.6.** Знайти перетвір Фур'є  $\delta$ -функції.

◁ За формулами (8.14), (8.2) і (8.8)

$$\left( \hat{\delta}_{\mathbf{a}}, \varphi \right) = (\delta_{\mathbf{a}}, \hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(\mathbf{a}) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\mathbf{a}\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

звідки за формулою (8.1)  $\hat{\delta}_{\mathbf{a}}(\mathbf{k}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{a}}$ , зокрема  $\hat{\delta}(\mathbf{k}) = 1$ .  $\triangleright$

**Приклад 8.7.** Знайти перетвір Фур'є мультістепеня.

◁ З попереднього прикладу і формул (8.14), (8.13), (8.2), маємо

$$\begin{aligned} (\hat{1}, \varphi) &= (1, \hat{\varphi}) = \left( \hat{\delta}, \hat{\varphi} \right) = (2\pi)^d (\delta, \varphi^{\#}) = (2\pi)^d \varphi^{\#}(0) \equiv (2\pi)^d \varphi(0) \\ &= (2\pi)^d (\delta, \varphi), \text{ звідки } \hat{1} = (2\pi)^d \delta. \text{ Тоді за формулою (8.16)} \end{aligned}$$

$$\widehat{\rho_{\alpha}} \equiv \widehat{\rho_{\alpha} 1} = (-i)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d} \partial^{\alpha} \hat{1} = (-i)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d} (2\pi)^d \partial^{\alpha} \delta. \triangleright$$

**Приклад 8.8.** Знайти перетвір Фур'є розподілу  $\mathcal{P} \frac{1}{x}$ .

◁ За формулами (8.14), (8.3) і (8.8)

$$\begin{aligned} \left( \widehat{\mathcal{P} \frac{1}{x}}, \varphi \right) &= \left( \mathcal{P} \frac{1}{z}, \hat{\varphi} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \frac{\hat{\varphi}(z) - \hat{\varphi}(0)}{z} dz \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \frac{dz}{z} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{izx} - 1) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Змінюючи в останньому інтегралі порядок інтегрування, перейшовши до границі під знаком  $\int \cdots dx$  (для  $\varphi \in \mathcal{S}$  теорема математичного аналізу дозволяє це зробити) і записавши

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{izx} - 1}{z} dz = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin zx}{z} dz = \pi i \operatorname{sgn} x$$

(перша рівність випливає з непарності дійсної частини підінтегральної функції, друга відома як формула Діріхле), одержуємо відповідь:  $\widehat{\mathcal{P} \frac{1}{x}} = \pi i \operatorname{sgn} x$ . ▷

**1.** Довести:  $\varphi \in \mathcal{S} \iff \forall m \in \mathbb{N} \forall \beta \in \mathbb{Z}_+^d \lim_{x \rightarrow \infty} |x|^m |\partial^\beta \varphi(x)| = 0 \iff \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d \lim_{x \rightarrow \infty} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| = 0$ .

**2.** Обчислити добуток  $x^n \mathcal{P} \frac{1}{x}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**3.** Обчислити добуток  $x^n \mathcal{P} \frac{1}{x^2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**4.** Довести формулу заміни змінних для узагальнених функцій:

$$(f(\xi(x)), \varphi(x)) = \left( f(\xi), \left| \det \left( \frac{dx}{d\xi} \right) \right| \varphi(x(\xi)) \right).$$

Зокрема, розглянути заміну  $\xi = Ax + b$ .

**5.** Спростити  $\delta(\alpha x)$ .

**6.** Спростити  $\delta(x^2 - a^2)$ ,  $a \neq 0$ .

**7.** Узагальнена функція  $f$  задається рівністю  $f(x) = \int_0^\infty \sin xy \cos y \, dy$  (у строгому записі:  $(f, \varphi) = \int_0^\infty \cos y \, dy \int_{-\infty}^\infty \varphi(x) \sin xy \, dx$ ). Довести, що

$$f(x) = \frac{1}{2} \left( \mathcal{P} \frac{1}{x+1} + \mathcal{P} \frac{1}{x-1} \right).$$

**8.** Знайти  $\delta_a^{(n)}$ .

9. Спростити  $x^n \delta^{(n)}(x)$ .

Знайти похідну узагальненої функції:

10.  $\operatorname{sgn} x$ .

14.  $\theta(x) \sin x$ .

18.  $\ln |x|$ .

11.  $|x|$ .

15.  $\theta(x) \cos x$ .

19.  $\mathcal{P} \frac{1}{x^2}$ .

12.  $x_+$ .

16.  $\theta(\sin x)$ .

20.  $\frac{1}{x \pm i0}$ .

13.  $\theta(1 - x^2)$ .

17.  $(\sin x)_+$ .

21. Довести, що  $f(\widehat{\mathbf{x} - \mathbf{a}}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{a}} \widehat{f(\mathbf{x})}$ . Вивести аналогічну формулу для оберненого перетворення Фур'є.

Знайти перетвір Фур'є функції:

22.  $\theta(x - a)$ .

25.  $x^n \delta^{(m)}(x)$ .

28.  $\cos ax$ .

23.  $\operatorname{sgn} x$ .

26.  $e^{ax}$ .

24.  $|x|$ .

27.  $\sin ax$ .

## § 9. Рівняння дифузії в $\mathbb{R}^d$

Розв'язок задачі Коші

$$u_t = a^2 \Delta u + f, \quad (9.1a)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \quad (9.1b)$$

в  $\mathbb{R}^d$  дається формулою

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^d} G(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, t) u_0(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} G(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, t - \tau) f(\boldsymbol{\xi}, \tau) d\boldsymbol{\xi}, \quad (9.2)$$

де

$$G(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2a)^d (\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4a^2 t}}, \quad (9.3)$$

зокрема при  $d = 1$

$$G(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}. \quad (9.4)$$

Порівняння останніх двох рівностей показує, що

$$G(\mathbf{x}, t) = \prod_{k=1}^d G(x_k, t). \quad (9.5)$$



Перший доданок у правій частині (9.2) можна записати ще таким чином:  $\int_{\mathbb{R}^d} G(\xi, t) u_0(\mathbf{x} - \xi) d\xi$ . Так само в другому доданку можна записувати підінтегральну функцію ще будь-яким із трьох способів:  $G(\xi, \tau) f(\mathbf{x} - \xi, t - \tau)$ ,  $G(\mathbf{x} - \xi, \tau) f(\xi, t - \tau)$ ,  $G(\xi, t - \tau) f(\mathbf{x} - \xi, \tau)$ .

### Приклад 9.1

$$\left\| \begin{array}{l} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(x, 0) = e^{cx}. \end{array} \right.$$

◁ Перший спосіб. За формулою (9.2)

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi, t) e^{c(x-\xi)} d\xi,$$

звідки зважаючи на (9.4)

$$u(x, t) = \frac{e^{cx}}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\xi^2/4a^2 t + c\xi)} d\xi. \quad (9.6)$$

Обчислимо інтеграл

$$A(q, c) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(q\xi^2 + c\xi)} d\xi \quad (q > 0). \quad (9.7)$$

Позначивши

$$\eta = \sqrt{q}\xi + \frac{c}{2\sqrt{q}} \quad (9.8)$$

(так що  $d\xi = d\eta/\sqrt{b}$ ) і записавши тотожність

$$q\xi^2 + c\xi = \eta^2 - \frac{c^2}{4q},$$

перетворимо (9.7) до вигляду

$$A(q, c) = \frac{e^{c^2/4q}}{\sqrt{q}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta. \quad (9.9)$$

Інтеграл у правій частині рівності дорівнює, як відомо з математичного аналізу,  $\sqrt{\pi}$ . Отже,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(q\xi^2 + c\xi)} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{q}} e^{c^2/4q}, \quad (9.10)$$

що разом із (9.6) дає відповідь:

$$u(x, t) = e^{cx + a^2 c^2 t}. \quad (9.11)$$

Другий спосіб, на відміну від першого, спирається не на універсаль-

ну формулу (9.2), а на той факт, що в даній задачі  $u_0$  є власною функцією диференціального оператора з правої частини рівняння. Щоб зробити міркування придатними ще для деяких прикладів, запишемо цю властивість у загальному вигляді:

$$u_0'' = \lambda u_0. \quad (9.12)$$

Якщо це виконано, то розв'язок задачі (9.3) з  $f = 0$  має вигляд

$$u(x, t) = u_0(x)T(t), \quad (9.13)$$

де  $T$  – розв'язок задачі Коші

$$\dot{T} = a^2 \lambda T, \quad T(0) = 1,$$

тобто  $T(t) = e^{a^2 \lambda t}$ . Справді, така функція  $u$  за побудовою задовольняє початкову умову (9.19). Підставивши (9.13) у (9.12) з  $f = 0$ , дістанемо  $(\dot{T} - a^2 \lambda T)u = 0$ . А це справджується за вибором  $T$ . У нашому випадку  $\lambda = c^2$ , тож рівність (9.13) є перепозначенням (9.11).

Підкреслимо ще раз, що другий спосіб застосовний тільки за умови (9.12). ▷

**Зауваження.** Якщо в (9.7) число  $c$  комплексне з ненульовою уявною частиною, то в (9.9) інтегрування ведеться не по дійсній осі, а по паралельній їй прямій у комплексній площині. Але з інтегральної теореми Коші легко вивести, що для будь-якого дійсного числа  $b$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{-\eta^2} d\eta = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R+bi}^{R+bi} e^{-\eta^2} d\eta,$$

тож таке зміщення шляху інтегрування не змінює значення інтеграла. Тому рівність (9.9) має місце і для комплексного  $c$ .

## Приклад 9.2

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(x, 0) = \cos bx. \end{cases}$$

◁ Перший спосіб. За формулою (9.2)

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi, t) \cos b(x - \xi) d\xi. \quad (9.14)$$

Записавши

$$\cos(bx - b\xi) = \cos bx \cos b\xi + \sin bx \sin b\xi$$

і взявши до уваги парність косинуса, непарність синуса і впливаючу з (9.4) парність  $G$  по першій змінній, дістанемо

$$u(x, t) = \cos bx \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi, t) \cos b\xi d\xi.$$

Звідси і з (9.4), скориставшись відомою формулою

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} \cos bx dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-b^2/4\alpha} \quad (\alpha > 0), \quad (9.15)$$

одержуємо відповідь:

$$u(x, t) = e^{-a^2 b^2 t} \cos bx. \quad (9.16)$$

**Другий спосіб.** Функція  $u_0(x) = \cos bx$  має властивість (9.12) із  $\lambda = -b^2$ , а значить розв'язок задачі зображується у вигляді (9.13), де  $T$  така сама, як у попередньому прикладі.

**Третій спосіб.** Із формули Ейлера  $\cos \phi = (e^{i\phi} + e^{-i\phi})/2$  і попереднього прикладу, замінивши в ньому  $c$  на  $\pm bi$  (зауваження до прикладу 9.1 дозволяє це зробити), маємо (9.16).  $\triangleright$

### Приклад 9.3

$$\left\{ \begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, \\ u(x, 0) &= e^{-cx^2} \end{aligned} \right. \quad (c > 0).$$

$\triangleleft$  За формулами (9.2) і (9.4)

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} D\left(x, \frac{1}{4a^2 t}, c\right),$$

де

$$\begin{aligned} D(x, q, c) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-q(x-\xi)^2} e^{-c\xi^2} d\xi \\ &\equiv e^{-(1-(q+c)^{-1}q)x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(q+c)(\xi-(q+c)^{-1}qx)^2} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{q+c}} e^{-(1-(q+c)^{-1}q)x^2}. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1+4a^2 ct}} \exp\left(-\frac{cx^2}{1+4a^2 ct}\right). \triangleright$$

### Приклад 9.4

$$\left\{ \begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} + te^x, \\ u(x, 0) &= 0. \end{aligned} \right.$$

$\triangleleft$  За формулою (9.2)

$$u(x, t) = \int_0^t (t-\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi, \tau) e^{x-\xi} d\xi.$$

Внутрішній інтеграл як функція від  $x$  і  $\tau$  являє собою, згідно з (9.2) розв'язок задачі прикладу 9.1 з  $c = 1$  і, таким чином, дорівнює  $e^{x+a^2\tau}$ .

Тоді

$$u(x, t) = e^x \int_0^t (t - \tau) e^{a^2 \tau} d\tau,$$

звідки, проінтегрувавши частинами ( $e^{a^2 \tau} d\tau = a^{-2} de^{a^2 \tau}$ ), одержуємо відповідь

$$u(x, t) = a^{-4} \left( e^{a^2 t} - 1 - a^2 t \right) e^x. \triangleright$$

### Приклад 9.5

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + bu_x + cu + f, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

◁ Оскільки функції  $f$  і  $u_0$  не конкретизуються, то потрібно вивести загальну формулу розв'язку, або, що те саме, побудувати функцію Гріна оператора  $L = \partial_t - a^2 \partial_{xx} - b \partial_x - c$ , тобто функцію  $G^L$  таку, що  $u$  виражається через  $u_0$  і  $f$  за формулою (9.2) з  $G^L$  замість  $G$ .

Шукаємо розв'язок у вигляді (пор. з (1.31))

$$u(x, t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x, t),$$

підбираючи  $\alpha$  і  $\beta$  так, що рівняння для  $v$  не містило  $v_x$  і  $v$ .

Очевидно,

$$u_t = e^{\alpha x + \beta t} (v_t + \beta v), \quad u_x = e^{\alpha x + \beta t} (v_x + \alpha v), \quad u_{xx} = e^{\alpha x + \beta t} (v_{xx} + 2\alpha v_x + \alpha^2 v).$$

Підставивши ці вирази в рівняння для  $u$ , одержуємо після тотожних перетворень

$$v_t = a^2 v_{xx} + (2\alpha a^2 + b) v_x + (\alpha^2 a^2 + \alpha b + c - \beta) v + e^{-\alpha x - \beta t} f.$$

Отже, поклавши

$$\alpha = -b/2a^2, \quad \beta = \alpha^2 a^2 + \alpha b + c \equiv -b^2/4a^2 + c, \quad (9.17)$$

дістанемо для  $v$  задачу

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} + e^{-\alpha x - \beta t} f, \\ v(x, 0) = e^{-\alpha x} u_0(x), \end{cases}$$

розв'язок якої записується за формулою (9.2) з очевидними перепозначеннями:

$$v(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, t - \tau) e^{-\alpha \xi - \beta \tau} f(\xi, \tau) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, t) e^{-\alpha \xi} u_0(\xi) d\xi.$$

Помноживши обидві частини рівності на  $e^{\alpha x + \beta t}$  і позначивши

$$G^L(x, t) = e^{\alpha x + \beta t} G(x, t), \quad (9.18)$$

дістанемо для  $u$  вираз (9.2) з  $G^L$  замість  $G$ . Це й означає, що  $G^L$  — функція Гріна оператора  $L$ . Її вираз (9.18) з урахуванням (9.17) і (9.4)

конкретизується так:

$$G^L(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left(ct - \frac{(x + bt)^2}{4a^2 t}\right). \triangleright$$

### Приклад 9.6

$$\left\| \begin{aligned} u_t &= a^2 \Delta_2 u, \\ u(x, y, 0) &= e^{cx} \cos by. \end{aligned} \right.$$

$\triangleleft$  Це задача (9.1) з  $d = 2$ ,  $f = 0$ ,  $u_0(x, y) = e^{cx} \cos by$ . Специфіка початкової умови полягає в тому, що функція  $u_0$  є тензорним добутком<sup>2</sup>, що можна в загальному вигляді записати так:

$$u_0(x, y) = u_{01}(x)u_{02}(y). \quad (9.19)$$

Цю ж властивість згідно з (9.5) має  $G$  як функція від  $x$  і  $y$ :

$$G(x, y, t) = G(x, t)G(y, t).$$

Звідси, записавши рівність (9.2) з  $f = 0$  в розгорнутому вигляді

$$u(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, y - \eta, t) u_0(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

одержуємо

$$u(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, t) u_{01}(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} G(y - \eta, t) u_{02}(\eta) d\eta. \quad (9.20)$$

Таким чином, за умови (9.19)  $u$  як функція просторових змінних також виявляється тензорним добутком. Заради цього висновку ми й наводимо даний приклад. Завершальна ж частина його суто технічна.

Інтеграли в правій частині рівності (9.20) – це розв'язки задач

$$\left\| \begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, \\ u(x, 0) &= u_{01}(x) \end{aligned} \right. \quad \text{і} \quad \left\| \begin{aligned} u_t &= a^2 u_{yy}, \\ u(y, 0) &= u_{02}(y). \end{aligned} \right.$$

Узявши  $u_{01}(x) = e^{cx}$ ,  $u_{02}(y) = \cos by$  і скориставшись результатами перших двох прикладів, одержимо відповідь:

$$u(x, y, t) = e^{a^2(c^2 - b^2)t + cx} \cos by. \triangleright$$

### Приклад 9.7

$$\left\| \begin{aligned} u_t &= a^2 \Delta_2 u, \\ u(\rho, \phi, 0) &= J_\nu(\rho) \cos \nu \phi. \end{aligned} \right.$$

Тут  $\nu$  – дійсний параметр,  $J_\nu$  – бесселева функція порядку  $\nu$ ;  $\rho$  і  $\phi$  – полярні координати просторової змінної.

$\triangleleft$  Пригадавши вираз лапласового оператора в полярних координатах

---

<sup>2</sup>Тобто таким добутком, у якому кожний співмножник залежить від своєї змінної.

тах

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

і рівняння Бесселя

$$Z''(\rho) + \rho^{-1} Z'(\rho) - \nu^2 \rho^{-2} Z(\rho) = -Z(\rho),$$

одним із розв'язків якого є  $J_\nu$ , бачимо, що функція  $u_0(\rho, \phi) = J_\nu(\rho) \cos \nu \phi$  має властивість  $\Delta u_0 = -u_0$ , аналогічну властивості (9.12) у прикладах 9.1 і 9.2. Звідси, міркуючи як у прикладі 9.1, одержуємо

$$u(\rho, \phi, t) = u_0(\rho, \phi) e^{-a^2 t}. \triangleright$$

### Приклад 9.8

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta_d u + F(|\mathbf{x}|, t), \\ u(\mathbf{x}, 0) = U_0(|\mathbf{x}|). \end{cases} \quad (9.21)$$

◁ Спеціальний вигляд вільного члена і початкової умови дозволяє понизити кратність інтегралів, що входять у (9.2). Обчислення спирається на наступні викладки, які запишемо в автономних позначеннях.

Очевидно, для будь-якої абсолютно інтегровної функції  $f$  на  $\mathbb{R}^d$

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = \int_0^\infty \rho^{d-1} d\rho \int_{S^{d-1}} f(\rho \mathbf{q}) d\sigma(\mathbf{q}), \quad (9.22)$$

де  $\rho = |\boldsymbol{\xi}|$ ,  $\mathbf{q} = \boldsymbol{\xi}/\rho$  і, нагадаємо,  $S^{d-1}$  – одинична сфера в  $\mathbb{R}^d$ . Точка на  $S^{d-1}$  задається  $d-1$  кутовими координатами. Першу з них, широту (позначимо її  $\vartheta$ ), можна відраховувати від довільного фіксованого напрямку (далі ми його виберемо належним чином). Припустимо, що  $f$  залежить від точки простору тільки через її сферичний радіус і широту. Замість широти, яка змінюється від нуля до  $\pi$ , зручніше використовувати її косинус. Таким чином, зроблене припущення про  $f$  означає, що  $f(\rho \mathbf{q}) = g(\rho, \rho \cos \vartheta)$ , де  $g$  – деяка функція на  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ . Тоді

$$\int_{S^{d-1}} f(\rho \mathbf{q}) d\sigma(\mathbf{q}) = \int_0^\pi g(\rho, \rho \cos \vartheta) \sin^{d-2} \vartheta d\vartheta \int_{S^{d-2}} d\sigma(\mathbf{p}),$$

де внутрішній інтеграл при  $d \geq 3$  дорівнює  $\sigma_{d-1}$  – площі сфери  $S^{d-2}$ , а при  $d = 2$  формально покладемо  $\sigma_1 = 2$ . Звідси і з (9.22) маємо

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = \sigma_{d-1} \int_0^\infty \rho^{d-1} d\rho \int_0^\pi g(\rho, \rho \cos \vartheta) \sin^{d-2} \vartheta d\vartheta. \quad (9.23)$$

Вернувшись до задачі (9.21), позначимо  $r = |\mathbf{x}|$  і запишемо за фор-

мулюю (9.2) розв'язок у вигляді

$$u(\mathbf{x}, t) = (2a)^{-d} (\pi t)^{-d/2} e^{-r^2/4a^2 t} A(\mathbf{x}, t) + \int_0^t (2a)^{-d} (\pi(t-\tau))^{-d/2} e^{-r^2/4a^2(t-\tau)} B(\mathbf{x}, t, \tau) d\tau, \quad (9.24)$$

де

$$A(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{(-|\xi|^2 + 2\mathbf{x}\xi)/4a^2 t} U_0(|\xi|) d\xi, \\ B(\mathbf{x}, t, \tau) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{(-|\xi|^2 + 2\mathbf{x}\xi)/4a^2(t-\tau)} F(|\xi|, \tau) d\xi.$$

Відраховуючи широту від напрямку вектора  $\mathbf{x}$ , так що  $\mathbf{x}\xi = r\rho \cos \vartheta$ , одержимо з (9.23)

$$A(\mathbf{x}, t) = \sigma_{d-1} \int_0^\infty \rho^{d-1} e^{-\rho^2/4a^2 t} U_0(\rho) d\rho \int_0^\pi e^{r\rho \cos \vartheta/2a^2 t} \sin^{d-2} \vartheta d\vartheta.$$

Відомі формули  $\sigma_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$  і (7.17) дозволяють спростити цей вираз:

$$A(\mathbf{x}, t) = 2^{d-1} a^{d-1} \pi^{d/2} t^{d/2-1} r^{1-d/2} \int_0^\infty \rho^{d/2} e^{-\rho^2/4a^2 t} I_{\frac{d-2}{2}} \left( \frac{r\rho}{2a^2 t} \right) U_0(\rho) d\rho.$$

Вираз  $B(\mathbf{x}, t, \tau)$  відрізняється від написаного тільки позначеннями. Підставивши обидва вирази в (9.24), одержимо відповідь:

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{e^{-r^2/4a^2 t}}{2a^2 t r^{d/2-1}} \int_0^\infty \rho^{d/2} e^{-\rho^2/4a^2 t} I_{\frac{d-2}{2}} \left( \frac{r\rho}{2a^2 t} \right) U_0(\rho) d\rho \\ + \frac{r^{1-d/2}}{2a^2} \int_0^t \frac{e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}}{t-\tau} d\tau \int_0^\infty \rho^{d/2} e^{-\frac{\rho^2}{4a^2(t-\tau)}} I_{\frac{d-2}{2}} \left( \frac{r\rho}{2a^2(t-\tau)} \right) F(\rho, \tau) d\rho. \triangleright \quad (9.25)$$

## Приклад 9.9

$$\begin{cases} u_t = \Delta_2 u, \\ u(\mathbf{x}, 0) = |\mathbf{x}|. \end{cases}$$

◁ Це окремий випадок задачі (9.21), тому переходимо до полярних координат. Але на відміну від попереднього прикладу, де ми інтегрували спочатку по кутових змінних, а потім по радіальній (формула (9.23)), у даному випадку краще інтегрувати у зворотному порядку.

З (9.2) і (9.3) маємо

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty \rho^2 \exp\left(-\frac{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \phi}{4t}\right) d\rho,$$

де  $r = |\mathbf{x}|$ . Зробивши у внутрішньому інтегралі заміну  $\rho = 2\sqrt{t}p$ , перетворимо цю рівність до вигляду

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{2\sqrt{t}}{\pi} e^{-\frac{r^2}{4t}} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty p^2 e^{-p^2} e^{-\frac{rp \cos \phi}{\sqrt{t}}} dp, \quad (9.26)$$

Нехай  $b$  і  $g$  – число і функція на  $\mathbb{R}_+$  такі, що  $\int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{2bp \cos \phi} |g(p)| dp d\phi < \infty$ . Позначимо

$$I(b) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty e^{2bp \cos \phi} g(p) dp.$$

Зважаючи на  $2\pi$ -періодичність косинуса відрізок інтегрування по  $\phi$  можна як завгодно зміщувати. Звідси і з парності косинуса маємо

$$I(b) = 2 \int_0^\pi d\phi \int_0^\infty e^{2bp \cos \phi} g(p) dp.$$

Зробивши заміну  $\phi = \pi - \psi$ , бачимо, що  $I(b) = I(-b)$ .

Продовжимо функцію  $g$  на всю пряму парним чином. Тоді, очевидно,

$$I(-b) = 2 \int_0^\pi d\phi \int_{-\infty}^0 e^{2bp \cos \phi} g(p) dp.$$

Отже,

$$I(\pm b) = \frac{I(b) + I(-b)}{2} = \int_0^\pi d\phi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2bp \cos \phi} g(p) dp. \quad (9.27)$$

Позначимо

$$F(a, b) = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{+\infty} e^{-ap^2 - 2bp \cos \phi} dp$$

( $a$  – додатний параметр). Тоді, поклавши в (9.27)  $g(p) = e^{-ap^2}$ , дістанемо

$$F(a, b) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\phi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(p + \frac{b \cos \phi}{a})^2 + \frac{b^2 \cos^2 \phi}{a}} dp = \frac{2e^{\frac{b^2}{2a}}}{\sqrt{\pi a}} \int_0^\pi e^{\frac{b^2 \cos 2\phi}{2a}} d\phi.$$

Звідси, зробивши заміну  $\phi = \psi/2$  і скориставшись формулою (7.16), одержуємо

$$F(a, b) = 2\sqrt{\pi/a} e^{b^2/2a} I_0(b^2/2a),$$



що з урахуванням (7.14) дає

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a, b) = -\sqrt{\frac{\pi}{a^5}} e^{\frac{b^2}{2a}} \left[ (a + b^2) I_0 \left( \frac{b^2}{2a} \right) + b^2 I_1 \left( \frac{b^2}{2a} \right) \right].$$

З іншого боку, як показує вираз  $F$ ,

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a, b) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{+\infty} p^2 e^{-ap^2 - 2bp \cos \phi} dp.$$

Отже,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{+\infty} p^2 e^{-p^2 - 2bp \cos \phi} dp = \sqrt{\pi} e^{\frac{b^2}{2}} \left[ (1 + b^2) I_0 \left( \frac{b^2}{2} \right) + b^2 I_1 \left( \frac{b^2}{2} \right) \right].$$

Поклавши тут  $b = r/2\sqrt{t}$ , перетворимо рівність (9.26) до вигляду

$$u(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\pi t} e^{-\frac{r^2}{4t}} \left[ \left( 1 + \frac{r^2}{4t} \right) I_0 \left( \frac{r^2}{4t} \right) + \frac{r^2}{4t} I_1 \left( \frac{r^2}{4t} \right) \right]. \triangleright$$

### Приклад 9.10

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta_d u + F(\mathbf{b}\mathbf{x}, t), \\ u(\mathbf{x}, 0) = U_0(\mathbf{b}\mathbf{x}) \end{cases} \quad (9.28)$$

( $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$  – сталий вектор,  $\mathbf{b}\mathbf{x}$  – скалярний добуток).

◁ Це задача (9.1) з  $f(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{b}\mathbf{x}, t)$ ,  $u_0(\mathbf{x}) = U_0(\mathbf{b}\mathbf{x})$ . Як і в прикладі 9.8, спеціальний вигляд вільного члена і початкової умови дозволяють понизити кратність кожного з інтегралів у формулі (9.2) на  $d - 1$  так, як це було зроблено вище. Але ми виберемо простіший шлях, на якому кратні інтеграли по просторовій змінній узагалі не виникають. А саме, шукаємо розв'язок у вигляді

$$u(\mathbf{x}, t) = U(\mathbf{b}\mathbf{x}, t), \quad (9.29)$$

де  $U$  – функція двох скалярних змінних.

Очевидно, для будь-якої двічі диференційовної функції  $V$  на  $\mathbb{R}$

$$\Delta v(\mathbf{x}) = b^2 V''(\mathbf{b}\mathbf{x}),$$

де  $v(\mathbf{x}) = V(\mathbf{b}\mathbf{x})$ ,  $b = |\mathbf{b}|$ . Тому, якщо  $U$  – розв'язок задачі

$$\begin{cases} U_t = (ab)^2 U_{xx} + F(x, t), \\ U(x, 0) = U_0(x) \end{cases}$$

(того ж виду, що й (9.28), але, завдяки меншій розмірності простору, простішої), то рівність (9.29) дає розв'язок задачі (9.28).  $\triangleright$

Розв'язати задачу Коші для одновимірного рівняння дифузії:

$$1. \begin{cases} u_t = u_{xx}, \\ u(x, 0) = e^{-c^2 x^2} \cos x. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} u_t = u_{xx}, \\ u(x, 0) = x \cos x. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} u_t = u_{xx}, \\ u(x, 0) = x^2 e^{cx}. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} u_t = u_{xx}, \\ u(x, 0) = x \sin x. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} u_t = u_{xx}, \\ u(x, 0) = e^{-c^2 x^2} \sin x. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} u_t = u_{xx} + t e^x, \\ u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} u_t = u_{xx}, \\ u(x, 0) = e^{cx} \cos x. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{x+t}, \\ u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} u_t = u_{xx}, \\ u(x, 0) = x e^{-c^2 x^2}. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} u_t = u_{xx} + t \sin x, \\ u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} u_t = u_{xx}, \\ u(x, 0) = e^{cx} \sin x. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} u_t = 3u_{xx} + 6u_x - u, \\ u(x, 0) = 1. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} u_t = u_{xx} - 2u_x + u + (e^t + 1)^{-1}, \\ u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Розв'язати задачу Коші для багатовимірного рівняння дифузії:

$$14. \begin{cases} u_t = \Delta u + \operatorname{sh} t \cos(x - y), \\ u(x, y, 0) = 0. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} u_t = \Delta u, \\ u(x, y, z, 0) = y e^y J_0(\sqrt{x^2 + z^2}). \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} u_t = \Delta u, \\ u(x, y, 0) = (x + y^2)^2. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} u_t = \Delta u, \\ u(x, 0) = e^{2x} \cos x I_0(\sqrt{y^2 + z^2}). \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} u_t = \Delta u, \\ u(x, y, 0) = e^{-(3x+4y)^2}. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} u_t = \Delta u, \\ u(x, 0) = x \sin x I_0(\sqrt{y^2 + z^2}). \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} u_t = \Delta u, \\ u(x, y, 0) = \sin(x + y). \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} u_t = \Delta u + z^2 J_0(\sqrt{x^2 + y^2}), \\ u(x, y, z, 0) = 0. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} u_t = \Delta u - e^{-(12x-5y)^2}, \\ u(x, y, 0) = 0. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} u_t = \Delta u, \\ u(x, y, z, 0) = \sin(x - 2y + 2z). \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} u_t = \Delta u + e^{-t} I_0(\rho), \\ u(\rho, \phi, 0) = 0. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} u_t = \Delta u + \sin t \operatorname{ch}(x + y - 5z), \\ u(x, y, z, 0) = 0. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} u_t = \Delta u, \\ u(\rho, \phi, 0) = J_0(\rho). \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} u_t = a^2 \Delta u \\ u(r, \theta, \phi, 0) = r \cos \theta. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} u_t = \Delta u, \\ u(\rho, \phi, 0) = I_\nu(\rho) \sin \nu \phi. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} u_t = a^2 \Delta u - 2t^2 r \sin \theta \sin \phi, \\ u(r, \theta, \phi, 0) = 0. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} u_t = \Delta u + t J_\nu(\rho) \cos \nu \phi, \\ u(\rho, \phi, 0) = \rho^2 \cos^2 \phi. \end{cases}$$

31.  $\left\| \begin{aligned} u_t &= a^2 \Delta u + e^{-t} r \sin \theta \cos \phi, \\ u(r, \theta, \phi, 0) &= r^2 \cos \theta \sin \theta \cos \phi. \end{aligned} \right.$
32.  $\left\| \begin{aligned} u_t &= \Delta_2 u, \\ u(\mathbf{x}, 0) &= |\mathbf{x}|^{-1} e^{-a|\mathbf{x}|^2} \quad (a > 0). \end{aligned} \right.$
33.  $\left\| \begin{aligned} u_t &= \Delta_3 u, \\ u(\mathbf{x}, 0) &= |\mathbf{x}|^{-1} \sin c|\mathbf{x}|. \end{aligned} \right.$
34.  $\left\| \begin{aligned} u_t &= \Delta_3 u, \\ u(\mathbf{x}, 0) &= |\mathbf{x}|^{-1} \operatorname{sh} c|\mathbf{x}|. \end{aligned} \right.$
35.  $\left\| \begin{aligned} u_t &= \Delta_3 u, \\ u(\mathbf{x}, 0) &= \operatorname{ch} c|\mathbf{x}|. \end{aligned} \right.$
36.  $\left\| \begin{aligned} u_t &= \Delta_3 u, \\ u(\mathbf{x}, 0) &= \cos c|\mathbf{x}|. \end{aligned} \right.$
37.  $\left\| \begin{aligned} u_t &= a^2 \Delta_d u + \mathbf{b} \nabla u + cu, \\ u(\mathbf{x}, 0) &= u_0(\mathbf{x}). \end{aligned} \right.$
38.  $\left\| \begin{aligned} u_t &= u_{xx} + u_{yy} + 2u_x - 4u_y - u, \\ u(x, y, 0) &= x^2 y. \end{aligned} \right.$

## § 10. Лінійні диференціальні задачі для рівнянь коливань і дифузії на прямій, півпрямій і відрізьку

Розв'язок задачі Коші

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f, \quad (10.1a)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (10.1b)$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x), \quad (10.1c)$$

в  $\mathbb{R}$  дається формулою Даламбера

$$u(x, t) = \frac{u_0(x + at) + u_0(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi. \quad (10.2)$$

Останній доданок можна записати ще так:

$$\frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a\tau}^{x+a\tau} f(\xi, t - \tau) d\xi$$

або так:

$$\frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} d\xi \int_{|\xi-x|/a}^t f(\xi, t - \tau) d\tau.$$

Рівність (10.2) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, t) u_0(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, t) u_1(\xi) d\xi \\ &\quad + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi, \quad (10.3) \end{aligned}$$

де

$$G(x, t) = \frac{\theta(at - |x|)}{2a} \equiv \frac{\theta(x + at) - \theta(x - at)}{2a}. \quad (10.4)$$

Якщо в (10.1a) просторова змінна  $x$  пробігає не всю пряму, а промінь або відрізок, то до початкових умов (10.1b) і (10.1c) потрібно приєднати межові.

**Приклад 10.1.** Побудувати функцію Гріна оператора  $\partial^2/\partial t^2 - (a^2\partial^2/\partial x^2 + \mu^2)$ , тобто функцію  $H = H(x, t)$  таку, що розв'язок задачі

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \mu^2 u, \quad (10.5a)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad (10.5b)$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (10.5c)$$

в  $\mathbb{R}$  дається формулою

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x - \xi, t) \psi(\xi) d\xi \quad \left( = \int_{-\infty}^{\infty} H(\xi, t) \psi(x - \xi) d\xi \right). \quad (10.6)$$

◁ Перший спосіб. Шукаємо  $H$  у вигляді

$$H(x, t) = \theta(at - |x|) X(a^2 t^2 - x^2), \quad (10.7)$$

добираючи функцію  $X$  так, щоб для будь-якої кусково неперервної функції  $\psi$  задана рівністю (10.6) функція  $u$  була розв'язком задачі (10.5).

Підставивши (10.7) у (10.6), дістанемо

$$u(x, t) = \int_{x-at}^{x+at} X(a^2 t^2 - (x - \xi)^2) \psi(\xi) d\xi, \quad (10.8)$$

або, рівносильно,

$$u(x, t) = \int_{-at}^{at} X(a^2 t^2 - \xi^2) \psi(x - \xi) d\xi. \quad (10.9)$$

Очевидно,  $u$  задовольняє умову (10.5b).

Продиференціювавши рівність (10.9) по  $t$  раз, а тоді ще раз, діста-

НЕМО

$$u_t(x, t) = aX(0) (\psi(x - at) + \psi(x + at)) + 2a^2 t \int_{-at}^{at} X' (a^2 t^2 - \xi^2) \psi(x - \xi) d\xi, \quad (10.10)$$

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= a^2 X(0) (\psi'(x - at) - \psi'(x + at)) + 2a^2 \int_{-at}^{at} X' (a^2 t^2 - \xi^2) \psi(x - \xi) d\xi \\ &+ 2a^3 t X'(0) (\psi(x - at) + \psi(x + at)) + 4a^4 t^2 \int_{-at}^{at} X'' (a^2 t^2 - \xi^2) \psi(x - \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (10.11)$$

Диференціювання по  $x$  рівності (10.9) дає

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &= X(0) (\psi(x + at) - \psi(x - at)) - 2 \int_{x-at}^{x+at} (x - \xi) X' (a^2 t^2 - (x - \xi)^2) \psi(\xi) d\xi, \\ u_{xx}(x, t) &= X(0) (\psi'(x + at) - \psi'(x - at)) + 2at X'(0) (\psi(x + at) - \psi(x - at)) \\ &+ \int_{x-at}^{x+at} [4(x - \xi)^2 X'' (a^2 t^2 - (x - \xi)^2) - 2X' (a^2 t^2 - (x - \xi)^2)] \psi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Таким чином, підпорядкувавши функцію  $X$  вимозі

$$X'(0) = 0, \quad (10.12)$$

МАТИМЕМО

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) &= X(0) (\psi'(x + at) - \psi'(x - at)) \\ &+ \int_{-at}^{at} [4\xi^2 X'' (a^2 t^2 - \xi^2) - 2X' (a^2 t^2 - \xi^2)] \psi(x - \xi) d\xi, \end{aligned}$$

що разом із (10.11), (10.12) (ще раз) і (10.9) дає

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) - \mu^2 u(x, t) &= 4a^2 \int_{-at}^{at} [(a^2 t^2 - \xi^2) X'' (a^2 t^2 - \xi^2) \\ &+ X' (a^2 t^2 - \xi^2) - (\mu/2a)^2 X (a^2 t^2 - \xi^2)] \psi(x - \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Зважаючи на (10.5а) ліва частина рівності є тотожний нуль. З огляду на довільність  $\psi$  це означає, що тотожним нулем є і вираз у квадратних дужках. Отже, функція  $X$  повинна при додатних значеннях аргументу задовольняти рівняння

$$xX'' + X' - (\mu/2a)^2 X = 0. \quad (10.13)$$

Покажемо, що за належного вибору константи  $\alpha$  одним із розв'язків його є

$$X(x) = I_0(\alpha\sqrt{x}), \quad (10.14)$$

де  $I_\nu$  – модифікована бesselева функція порядку  $\nu$ .

Позначимо  $F(x) = xI_1(x)$ . Спираючись на формули (7.14) і (7.15), одержуємо з (10.14)

$$\begin{aligned} X'(x) &= \frac{F(\alpha\sqrt{x})}{2x}, \\ X''(x) &= -\frac{F(\alpha\sqrt{x})}{2x^2} + \frac{\alpha F'(\alpha\sqrt{x})}{4x^{3/2}} = -\frac{F(\alpha\sqrt{x})}{2x^2} + \frac{\alpha^2 I_0(\alpha\sqrt{x})}{4x} \\ &= -\frac{X'(x)}{x} + \frac{\alpha^2 X(x)}{4x}. \end{aligned}$$

Отже, треба покласти  $\alpha = \mu/a$ . Взявши ще до уваги лінійність і однорідність рівняння (10.13), доходимо такого висновку: для будь-якого  $C \in \mathbb{R}$  функція

$$X(x) = CI_0\left(\frac{\mu\sqrt{x}}{a}\right) \quad (10.15)$$

задовольняє рівняння (10.13). Задовольняє вона й умову (10.12), бо  $I_1(0) = 0$ . Поклавши в (10.10)  $t = 0$ , бачимо, що значення  $X(0) = 1/2a$  забезпечує виконання умови (10.5с), тож у (10.15) слід узяти  $C = 1/2a$  (нагадаємо, що  $I_0(0) = 1$ ). Відтак, підставивши (10.15) у (10.7), одержуємо відповідь:

$$H(x, t) = \frac{\theta(at - |x|)I_0(\mu a^{-1}\sqrt{a^2 t^2 - x^2})}{2a}. \quad (10.16)$$

Другий спосіб буде продемонстровано в прикладі 11.9.  $\triangleright$

**Приклад 10.2.** Побудувати функцію Гріна оператора

$\partial^2/\partial t^2 - (a^2\partial^2/\partial x^2 - \mu^2)$ , тобто функцію  $H$  таку, що розв'язок задачі

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} - \mu^2 u, \\ u(x, 0) = 0, \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

в  $\mathbb{R}$  дається формулою (10.6).

$\triangleleft$  Перший спосіб такий же, як і в попередньому прикладі. Шукаємо  $H$  у вигляді (10.7). Оскільки порівняно з прикладом 11.9 змінився тільки знак перед  $\mu^2$ , то ті самі викладки приводять до задачі Коші

$$\begin{cases} xX'' + X' + (\mu/2a)^2 X = 0, \\ X(0) = 1/2a, \quad X'(0) = 0. \end{cases}$$

Спираючись на формули (7.6) і (7.7) пересвідчуємося, що розв'язок її

дається формулою

$$X(x) = (2a)^{-1} J_0(\alpha\sqrt{x}),$$

аналогічною (10.15). Підставивши цей вираз у (10.7), одержимо відповідь:

$$H(x, t) = \frac{\theta(at - |x|) J_0(\mu a^{-1} \sqrt{a^2 t^2 - x^2})}{2a}.$$

Другий спосіб. Той самий вираз одержимо замінивши в умові попереднього прикладу і відповіді (10.16) до нього  $\mu$  на  $\mu i$  і скориставшись впливаючою з (7.13) формулою  $I_0(ix) = J_0(x)$ .  $\triangleright$

**Приклад 10.3.** Розв'язати крайову задачу в  $\mathbb{R}_+$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f, \\ u(0, t) = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u_t(x, 0) = u_1(x). \end{array} \right.$$

$\triangleleft$  Ця задача описує коливання нескінченної в одну сторону струни ( $u(x, t)$  – відхил точки  $x$  у момент  $t$  від положення рівноваги) із закріпленим кінцем. Зведемо її до задачі Коші на  $\mathbb{R}$  продовживши функції  $f(\cdot, t)$ ,  $u$  і  $u_1$  з півосі на всю дійсну вісь так, щоб розв'язок задачі на  $\mathbb{R}$  справджував умову  $u(0, t) = 0$ . Для цього, очевидно, потрібно, щоб у кожній точці  $-x < 0$  початковий відхил  $u_0(-x)$ , початкова швидкість  $u_1(-x)$  і, в будь-який момент  $t$ , лінійна густина зовнішньої сили  $f(-x, t)$  були рівні за абсолютною величиною і протилежні за знаком цим же чинникам у точці  $x$ . Інакше кажучи, функції  $u_0$ ,  $u_1$  і  $f(\cdot, t)$  треба продовжити на від'ємну піввісь непарним чином:

$$u_i(-x) = -u_i(x), \quad f(-x, t) = -f(x, t). \quad (10.17)$$

Тоді точка 0 при всіх коливаннях нескінченної в обидві сторони струни залишатиметься нерухомою, так наче її закріплено. Тому при  $x > 0$  формула Даламбера даватиме розв'язок поставленої вище крайової задачі на  $\mathbb{R}_+$ . Але це незручна форма запису відповіді, бо в ній фігурують відсутні в постановці від'ємні значення аргументу функцій  $u_0$ ,  $u_1$  і  $f(\cdot, t)$ . Щоб виключити їх, запишемо на підставі (10.17)

$$u_0(x-at) = u_0(|x-at|) \operatorname{sgn}(x-at), \quad \int_{x-at}^{|x-at|} u_1(\xi) d\xi = 0, \quad \int_{x-as}^{|x-as|} f(\xi, \tau) d\xi = 0,$$

§ 10. Лінійні диференціальні задачі на прямій, півпрямій і відрізку у результаті чого рівність (10.2) набуде вигляду

$$u(x, t) = \frac{u_0(x + at) + u_0(|x - at|) \operatorname{sgn}(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{|x-at|}^{x+at} u_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{|x-a(t-\tau)|}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi. \quad (10.18)$$

Останній доданок можна ще записати як

$$\frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{|x-a\tau|}^{x+a\tau} f(\xi, t - \tau) d\xi. \triangleright$$

**Приклад 10.4.** а) Виразити функцію Гріна крайової задачі

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \quad (10.19a)$$

$$\frac{\partial^i u}{\partial t^i}(x, 0) = u_i(x), \quad i = 0, \dots, m-1, \quad (10.19b)$$

$$u(0, t) = 0 \quad (10.20)$$

на  $\mathbb{R}_+$  через функцію Гріна задачі Коші на  $\mathbb{R}$  з тими ж рівнянням і початковими умовами.

б) Для  $m = 2$  записати функцію Гріна в явному вигляді.

Еквівалентне формулювання пункту а) таке. Нехай  $G$  – функція Гріна задачі Коші (10.19) на  $\mathbb{R}$ , тобто функція змінних  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$  така, що для будь-яких кусково неперервних локально інтегровних функцій  $u_0, \dots, u_{m-1}, f$  (перші  $m$  на  $\mathbb{R}$ , остання на  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ ) розв'язок задачі дається формулою

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\partial^{m-1-i}}{\partial t^{m-1-i}} \int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi, t) u_i(\xi) d\xi + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi, \quad (10.21)$$

окремим випадком якої є (10.3). Потрібно виразити через неї функцію  $G_1 = G_1(x, \xi, t)$  (індекс вказує на рід межевої умови) трьох невід'ємних змінних таку, що розв'язок задачі (10.19) & (10.20) дається формулою

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\partial^{m-1-i}}{\partial t^{m-1-i}} \int_0^{\infty} G_1(x, \xi, t) u_i(\xi) d\xi + \int_0^t d\tau \int_0^{\infty} G_1(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi. \quad (10.22)$$

Підкреслимо, що  $G$  і  $G_1$  від  $u_0, \dots, u_{m-1}, f$  не залежать.

◁ а) Продовжуємо  $f(\cdot, t)$  і всі  $u_i$  на  $\mathbb{R}$  так само і з тих же міркувань, що й у попередньому прикладі. Тоді задана рівністю (10.21) функція  $u$



на  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  задовольняє не тільки рівняння (10.19а) і початкові умови (10.19б) (цей факт від способу продовження не залежить), але й межу умову (10.20). Справді, позначивши  $v(x, t) = u(-x, t)$ , одержимо з (10.19) і (10.17) задачу Коші для  $v$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^m v}{\partial t^m} &= a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - f, \\ \frac{\partial^i v}{\partial t^i}(x, 0) &= -u_i(x), \quad i = 0, \dots, m-1.\end{aligned}$$

Оскільки вона лінійна, то й розв'язок залежить від  $u_0, \dots, u_{m-1}, f$  лінійно, тож  $v(x, t) = -u(x, t)$ . Показавши  $x = 0$ , бачимо, що  $u(0, t) = 0$ .

Залишається перетворити формулу (10.20) так, щоб змінна інтегрування  $\xi$  пробігала тільки додатні значення. Записавши

$$\int_{-\infty}^0 G(x - \xi, t) u_i(\xi) d\xi = \int_0^{\infty} G(x + \xi, t) u_i(-\xi) d\xi \quad (10.23)$$

і скориставшись непарністю  $u_i$ , дістанемо

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, t) u_i(\xi) d\xi = \int_0^{\infty} (G(x - \xi, t) - G(x + \xi, t)) u_i(\xi) d\xi.$$

Отже, за умови (10.17) рівність (10.21) рівносильна (10.22), де

$$G_1(x, \xi, t) = G(x - \xi, t) - G(x + \xi, t). \quad (10.24)$$

б) При  $m = 2$  для  $G_1$  можна дати три еквівалентні вирази. Перші два випливають безпосередньо з (10.24) і (10.4):

$$\begin{aligned}G_1(x, \xi, t) &= \frac{\theta(at - |x - \xi|) - \theta(at - |x + \xi|)}{2a}, \\ G_1(x, \xi, t) &= \frac{\theta(x - \xi + at) - \theta(x - \xi - at) - \theta(x + \xi + at) + \theta(x + \xi - at)}{2a}.\end{aligned}$$

Порівнявши (10.22) при  $m = 2$  з (10.18), бачимо, що

$$G_1(x, \xi, t) = \frac{\theta(x + at - \xi) - \theta(|x - at| - \xi)}{2a}. \triangleright$$

**Приклад 10.5.** Виразити функцію Гріна  $G_2$  крайової задачі на  $\mathbb{R}_+$  з рівнянням (10.19а), початковими умовами (10.19б) і однорідною межевою умовою другого роду

$$u_x(0, t) = 0 \quad (10.25)$$

через функцію Гріна задачі Коші (10.19) на  $\mathbb{R}$ .

◁ Зміни порівняно з пунктом а) попереднього прикладу очевидні. Продовживши  $f(\cdot, t)$  і всі  $u_i$  на  $\mathbb{R}$  парним чином, дістанемо для  $v$  ту саму задачу Коші, що й для  $u$ . Отже,  $u(-x, t) = u(x, t)$ , що тягне за

собою (10.25).

З (10.23) і парності  $u_i$  маємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, t) u_i(\xi) d\xi = \int_0^{\infty} G_2(x, \xi, t) u_i(\xi) d\xi, \quad (10.26)$$

де

$$G_2(x, \xi, t) = G(x - \xi, t) + G(x + \xi, t).$$

Це і є функція Гріна крайової задачі (10.19) & (10.25) на  $\mathbb{R}_+$ . Рівності (10.21), (10.26) і аналогічна останній рівність для  $f(\cdot, t)$  дозволяють записати розв'язок цієї задачі у вигляді (10.22), замінивши, звичайно,  $G_1$  на  $G_2$ .  $\triangleright$

### Приклад 10.6

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = \mu(t). \end{array} \right. \quad (10.27)$$

$\triangleleft$  Припустимо тимчасово, що функція  $\mu$  двічі неперервно диференційовна. Тоді

$$u(x, t) = v(x, t) + \mu(t), \quad (10.28)$$

де  $v$  – розв'язок крайової задачі

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{tt} = a^2 v_{xx} - \ddot{\mu}, \quad x, t > 0, \\ v(x, 0) = -\mu(0), \\ v_t(x, 0) = -\dot{\mu}(0), \\ v(0, t) = 0 \end{array} \right.$$

з однією межевою умовою. За формулою (10.18)

$$\begin{aligned} v(x, t) = & -\mu(0) \frac{1 + \operatorname{sgn}(x - at)}{2} - \dot{\mu}(0) \frac{x + at - |x - at|}{2a} \\ & - \frac{1}{2a} \int_0^t (x + a(t - \tau) - |x - a(t - \tau)|) \ddot{\mu}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Очевидні тотожності

$$\operatorname{sgn} b + 1 = 2\theta(b), \quad b + c - |b - c| = 2(b \wedge c)$$

перетворюють цю рівність до вигляду

$$v(x, t) = -\mu(0)\theta(x - at) - \dot{\mu}(0) \left( \frac{x}{a} \wedge t \right) - \int_0^t \left( \frac{x}{a} \wedge (t - \tau) \right) \ddot{\mu}(\tau) d\tau. \quad (10.29)$$

Позначимо  $\alpha = t - x/a$ . Очевидно,

$$\frac{x}{a} \wedge (t - \tau) = \begin{cases} x/a, & \tau < \alpha, \\ t - \tau, & \tau > \alpha, \end{cases}$$

звідки

$$\int_0^t \left( \frac{x}{a} \wedge (t - \tau) \right) \ddot{\mu}(\tau) d\tau = \frac{x}{a} \int_0^{\alpha_+} \ddot{\mu}(\tau) d\tau + \int_{\alpha_+}^t (t - \tau) \ddot{\mu}(\tau) d\tau.$$

Проінтегрувавши (у другому доданку — частинами:  $\ddot{\mu}(\tau) d\tau = d\dot{\mu}(\tau)$ ) і звівши подібні, одержимо

$$\int_0^t \left( \frac{x}{a} \wedge (t - \tau) \right) \ddot{\mu}(\tau) d\tau = (\alpha_+ - \alpha) \dot{\mu}(\alpha_+) - \frac{x}{a} \dot{\mu}(0) + \mu(t) - \mu(\alpha_+),$$

що разом із (10.29) дає

$$v(x, t) = \mu(\alpha_+) - \mu(0) \theta(x - at) + a^{-1} (x - (x \wedge at)) \dot{\mu}(0) - (\alpha_+ - \alpha) \dot{\mu}(\alpha_+) - \mu(t).$$

Звідси і з очевидних рівностей

$$\begin{aligned} \mu(\alpha_+) - \mu(0) \theta(x - at) &= \mu(\alpha) (1 - \theta(x - at)), \\ \frac{x - (x \wedge at)}{a} &= \begin{cases} 0, & x < at, \\ -\alpha, & x > at, \end{cases} \\ (\alpha_+ - \alpha) \dot{\mu}(\alpha_+) &= \begin{cases} 0, & x < at, \\ -\alpha \dot{\mu}(0), & x > at, \end{cases} \end{aligned}$$

маємо

$$v(x, t) = \mu(\alpha) (1 - \theta(x - at)) - \mu(t),$$

що перетворює рівність (10.28) до вигляду

$$u(x, t) = \theta(t - x/a) \mu(t - x/a). \quad (10.30)$$

Якщо  $\mu(+0) \neq 0$ , то ця формула залишає значення  $u(x, a/x)$ , вони ж  $u(at, t)$ , невизначеними. Їх і не потрібно визначати, бо в такому разі  $u_{tt}$  і  $u_{xx}$  існують тільки як узагальнені функції, а тоді й розв'язок треба шукати в цьому класі. Задана ж рівністю (10.30) узагальнена функція не залежить від того, як ми доозначимо її на промені  $x = at$ , та й самі це доозначення у випадку  $\mu(+0) \neq 0$  буде чистим волюнтаризмом.

Ми вивели вираз (10.30), припустивши функцію  $\mu$  двічі неперервно диференційовною. Безпосередньо видно, що так задана функція справджує всі співвідношення задачі і тоді, коли  $\mu$  має цю властивість кусково, тобто для будь-якого  $T \geq 0$  існує скінченна послідовність  $0 = t_0 < \dots < t_m$  така, що  $t_m > T$  і на кожному з інтервалів  $]t_{i-1}, t_i[$   $\mu$  двічі диференційовна, а  $\dot{\mu}$  рівномірно неперервна. Таким чином, рівність (10.30) дає відповідь і в цьому випадку.  $\triangleright$

## Приклад 10.7

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x > 0, \\ u(x, 0) = 0, & u_t(x, 0) = 0, \\ u_x(0, t) = \mu(t). \end{cases}$$

◁ Позначимо  $v = u_x$ . Продиференціювавши по  $x$  рівняння і початкові (але не межову) умови, дістанемо для  $v$  задачу попереднього прикладу з інакше позначеною невідомою функцією. Тоді за формулою (10.30)

$$v(x, t) = \begin{cases} 0, & t < x/a, \\ \mu(t - x/a), & t > x/a, \end{cases}$$

звідки за формулою Ньютона–Лейбніца

$$u(x, t) - u(+0, t) = \int_0^{x \wedge at} \mu \left( t - \frac{\xi}{a} \right) d\xi.$$

Перейшовши до змінної інтегрування  $\tau = t - \xi/a$  і взявши до уваги, що  $t - (t \wedge x/a) = (t - a/x)_+$ , перетворимо рівність до вигляду

$$u(x, t) = a \int_{(t-x/a)_+}^t \mu(\tau) d\tau + g(t), \quad (10.31)$$

де  $g(t) = u(+0, t)$ . Щоб визначити  $g$ , підставимо цей вираз у рівняння для  $u$ .

При  $x > at$  із (10.31) маємо

$$u(x, t) = a \int_0^t \mu(\tau) d\tau + g(t),$$

звідки  $u_{xx} = 0$ ,  $u_{tt} = a\ddot{\mu} + \ddot{g}$ . Якщо ж  $x < at$ , то згідно з (10.31)

$$u(x, t) = a \int_{t-x/a}^t \mu(\tau) d\tau + g(t),$$

звідки

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &= \mu(t - x/a), & u_{xx}(x, t) &= a^{-1}\dot{\mu}(t - x/a), \\ u_t(x, t) &= a(\mu(t) - \mu(t - x/a)) + \dot{g}(t), \\ u_{tt}(x, t) &= a(\dot{\mu}(t) - \dot{\mu}(t - x/a)) + \ddot{g}(t) \equiv a^2 u_{xx} + a\dot{\mu}(t) + \ddot{g}(t). \end{aligned}$$

В обох випадках рівняння для  $u$  рівносильне рівності  $\dot{g} = -a\dot{\mu}$ . При цьому за означенням функції  $g$   $g(0) = u(+0, 0)$ ,  $\dot{g}(0) = u_t(+0, 0)$ . З останніх трьох рівностей і початкових умов для  $u$  знаходимо  $g(t) = -a \int_0^t \mu(\tau) d\tau$ . Підставивши це в (10.31), одержимо відповідь

$$u(x, t) = -a \int_0^{(t-x/a)_+} \mu(\tau) d\tau. \triangleright$$

### Приклад 10.8

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = a^2 u_{xx}, \quad x > 0, \\ u(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = \mu(t). \end{array} \right. \quad (10.32)$$

◁ Перший спосіб. Виконаємо перетворення Фур'є по змінній  $x$ . Нагадаємо, що для функцій на півпрямій воно існує у двох формах: косинус-і синус-перетворення. У цьому прикладі зручнішою є друга. Отож, для довільної функції  $g \in L_1(\mathbb{R}_+)$  позначимо

$$\hat{g}(\lambda) = \int_0^\infty g(x) \sin \lambda x dx. \quad (10.33)$$

Якщо  $g$  кусково неперервно диференційовна, то в точках неперервності

$$g(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \hat{g}(\lambda) \sin \lambda x dx. \quad (10.34)$$

Якщо  $g$  неперервно диференційовна, а  $g'$  кусково неперервно диференційовна, обидві функції абсолютно інтегровні і прямують до нуля на нескінченності, то, замінивши в (10.33)  $g$  на  $g''$  і двічі проінтегрувавши частинами, одержимо

$$\widehat{g''}(\lambda) = -\lambda^2 \hat{g}(\lambda) + \lambda g(+0).$$

Звідси, припустивши тимчасово, що при кожному  $t$   $u(\cdot, t)$  має перелічені властивості, і врахувавши умову задачі (10.32), дістаємо

$$\widehat{u_{xx}}(\lambda, t) = -\lambda^2 \hat{u}(\lambda, t) + \lambda \mu(t).$$

Якщо до того ж

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty u(x, t) \sin \lambda x dx = \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \sin \lambda x dx$$

і

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^\infty u(x, t) \sin \lambda x dx = \int_0^\infty \lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) \sin \lambda x dx,$$

то задача (10.32) переводиться синус-перетворенням у таку:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}_t = -a^2 \lambda^2 \hat{u} + a^2 \lambda \mu, \\ \hat{u}(\lambda, 0) = 0. \end{array} \right.$$

Розв'язок останньої дається, очевидно, формулою

$$\hat{u}(\lambda, t) = a^2 \lambda \int_0^t e^{-a^2 \lambda^2 (t-\tau)} \mu(\tau) d\tau.$$

З неї, вернувшись до оригіналів, знаходимо

$$u(x, t) = \int_0^t K(x, t - \tau) \mu(\tau) d\tau, \quad (10.35)$$

де  $K(\cdot, t)$  – така функція, що  $\hat{K}(\lambda, t) = a^2 \lambda e^{-a^2 \lambda^2 t}$ . Порівнявши цю рівність із (10.33) і (10.34), бачимо, що

$$K(x, t) = \frac{2a^2}{\pi} \int_0^\infty e^{-a^2 \lambda^2 t} \sin \lambda x d\lambda \equiv -2a^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda x d\lambda.$$

Звідси, записавши на підставі (9.15) і (9.4)

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda x d\lambda = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} = G(x, t),$$

одержуємо

$$K = -2a^2 G_x, \quad (10.36)$$

що перетворює рівність (10.35) до вигляду

$$u(x, t) = -2a^2 \int_0^t G_x(x, t - \tau) \mu(\tau) d\tau \equiv -2a^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t G(x, t - \tau) \mu(\tau) d\tau. \quad (10.37)$$

Вираз функції  $G_x$ , як видно з написаного вище виразу  $G$ , такий:

$$G_x(x, t) = -\frac{x}{4a^3 \sqrt{\pi t}^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}. \quad (10.38)$$

Зроблені вище припущення про  $u$  тепер перевіряти не потрібно, бо безпосередньо видно, що задана рівністю (10.37) функція справджує всі співвідношення задачі (10.32).

Другий спосіб використовує перетворення Лапласа по  $t$ . Позначимо

$$\tilde{u}(x, p) = \int_0^\infty e^{-pt} u(x, t) dt$$

(аналогічно  $\tilde{\mu}(p)$ ). Тоді за деяких тимчасових додаткових припущень, аналогічних зробленим у першому способі, з (10.32) дістаємо задачу Коші

$$\begin{cases} p\tilde{u} = a^2 \tilde{u}_{xx}, \\ \tilde{u}(0, p) = \tilde{\mu}(p), \end{cases}$$

в якій  $p$  відіграє роль параметра. Загальний розв'язок диференціального рівняння для  $\tilde{u}$  дається формулою

$$\tilde{u}(x, p) = C_1(p) e^{-\sqrt{p}x/a} + C_2(p) e^{\sqrt{p}x/a}.$$

Але  $e^{\sqrt{p}x/a}$  як функція від  $p$  не належить просторові перетворів, тож

$C_2(p) = 0$ , що спільно з початковою умовою дає

$$\tilde{u}(x, p) = e^{-\sqrt{p}x/a} \tilde{\mu}(p) \quad (10.39)$$

і за відомою властивістю перетворення Лапласа (добуток перетворів є перетвором згортки) приводить до формули (10.35), у якій цього разу  $K(x, \cdot)$  – функція така, що

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} K(x, t) dt = e^{-\sqrt{p}x/a}. \quad (10.40)$$

Позначивши

$$U(x, t) = \int_0^t K(x, \tau) d\tau \quad (10.41)$$

і записавши

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} dt \int_0^t K(x, \tau) d\tau = \int_0^{\infty} K(x, \tau) d\tau \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} dt,$$

виводимо з (10.40) і (10.41), що

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} U(x, t) dt = p^{-1} e^{-\sqrt{p}x/a}.$$

Права частина цієї рівності є, як видно з (10.39), перетвором розв'язку задачі (10.32) з  $\mu = 1$ , а значить  $U$  і є сам цей розв'язок. Покажемо, як знайти його, не використовуючи формулу (10.41), у якій підінтегральна функція поки що невідома.

Позначимо

$$H(x, t) = \int_0^t G_x(x, \tau) d\tau. \quad (10.42)$$

Узявши до уваги (10.38) і зробивши в інтегралі заміну  $\tau = x^2/4a^2s$ , дістанемо

$$H(x, t) = -\frac{1}{2a^2\sqrt{\pi}} \int_{x^2/4a^2}^{\infty} s^{-1/2} e^{-s} ds,$$

звідки видно, що  $H_t = a^2 H_{xx}$ ,  $H(x, +0) = 0$  і  $H(+0, t) = -(2a^2\sqrt{\pi})^{-1} \Gamma(1/2) \equiv -(2a^2)^{-1}$ . Отже, функція  $-2a^2 H$  – також розв'язок задачі (10.32) з  $\mu = 1$ , а значить  $-2a^2 H = U$ , що разом із (10.41) і (10.42) приводить до (10.36).

**Зауваження.** З (10.35) і (10.41) випливає **принцип Дюамеля**: розв'язок задачі (10.32) дається формулою

$$u(x, t) = \int_0^t \mu(t - \tau) \dot{U}(x, \tau) d\tau, \quad (10.43)$$

де  $U$  – розв’язок цієї ж задачі з  $\mu = 1$ . Він має місце і для хвильового рівняння. Справді, виведена в прикладі 10.6 рівність (10.30) показує, що розв’язок задачі (10.27) з  $\mu = 1 \in U(x, t) = \theta(t - x/a)$ . Для нього  $\dot{U}(x, t) = \delta(t - x/a)$  і, таким чином, рівність (10.30) рівносильна (10.43).

Операційне числення дає найкоротше, хоч і дещо формальне доведення цього важливого принципу. Фізично вмотивоване доведення наведено у [24, с. 238–240].

**Третій спосіб.** Припустивши тимчасово неперервну диференційовність  $\mu$ , шукаємо розв’язок задачі (10.32) у вигляді

$$u = v + \mu. \quad (10.44)$$

Тоді  $v$  повинна бути розв’язком задачі

$$\begin{cases} v_t = a^2 u_{xx} - \dot{\mu}, \\ v(x, 0) = -\mu(0), \\ v(0, t) = 0. \end{cases}$$

За формулою (10.22)

$$v(x, t) = -\mu(0) \int_0^\infty G_1(x, \xi, t) d\xi - \int_0^\infty d\xi \int_0^t G_1(x, \xi, t - \tau) \dot{\mu}(\tau) d\tau. \quad (10.45)$$

Записавши

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\xi \int_0^t G_1(x, \xi, t - \tau) \dot{\mu}(\tau) d\tau &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^\infty d\xi \int_0^{t-\varepsilon} G_1(x, \xi, t - \tau) \dot{\mu}(\tau) d\tau, \\ \int_0^{t-\varepsilon} G_1(x, \xi, t - \tau) \dot{\mu}(\tau) d\tau &= G_1(x, \xi, \varepsilon) \mu(t - \varepsilon) - G_1(x, \xi, t) \mu(0) \\ &\quad - \int_0^{t-\varepsilon} \mu(\tau) \frac{\partial G_1}{\partial \tau}(x, \xi, t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

( $\varepsilon$  вводиться для того, щоб не оперувати з  $G_1(x, \xi, 0) = \delta(x - \xi)$ ) і врахувавши, що в останньому доданку  $\partial G_1 / \partial \tau = -\partial G_1 / \partial t$ , перетворимо (10.45) до вигляду

$$v(x, t) = -\mu(t) \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^\infty G_1(x, \xi, \varepsilon) d\xi - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{t-\varepsilon} \mu(\tau) d\tau \int_0^\infty \frac{\partial G_1}{\partial t}(x, \xi, t - \tau) d\xi. \quad (10.46)$$

Розв’язком задачі (10.19) & (10.20) з  $m = 1$ ,  $f = 0$ ,  $u_0 = 1 \in$ , згідно з формулою (10.22), функція  $\int_0^\infty G_1(x, \xi, t) d\xi$ . Тоді з початкової умови (10.19b) ( $i = 0$ ) маємо

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^\infty G_1(x, \xi, \varepsilon) d\xi = 1.$$



Це разом із рівністю

$$\frac{\partial G_1}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2}, \quad t > 0,$$

(функція Гріна крайової задачі при додатних значеннях часового аргументу задовольняє однорідне диференціальне рівняння цієї задачі) перетворює (10.46) до вигляду

$$v(x, t) = -\mu(t) - a^2 \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{t-\varepsilon} \mu(\tau) d\tau \int_0^\infty \frac{\partial^2 G_1}{\partial \xi^2}(x, \xi, t - \tau) d\xi. \quad (10.47)$$

Зважаючи на (9.4) і (9.15) при  $s > 0$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\partial G_1}{\partial \xi}(x, \xi, s) = 0.$$

Тоді за формулою Ньютона–Лейбніца

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 G_1}{\partial \xi^2}(x, \xi, s) d\xi = -\frac{\partial G_1}{\partial \xi}(x, 0, s),$$

що разом із (10.47) і (10.44) дає

$$u(x, t) = a^2 \int_0^t \frac{\partial G_1}{\partial \xi}(x, 0, t - \tau) \mu(\tau) d\tau.$$

Щоб звести цю відповідь до вигляду (10.35), зауважимо, що згідно з (10.24)

$$\frac{\partial G_1}{\partial \xi}(x, \xi, t) = -\frac{\partial G}{\partial x}(x - \xi, t) - \frac{\partial G}{\partial x}(x + \xi, t),$$

так що  $\frac{\partial G_1}{\partial \xi}(x, 0, t) = -2\frac{\partial G}{\partial x}(x, t)$ .  $\triangleright$

### Приклад 10.9

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = a^2 u_{xx}, \quad x > 0, \\ u(x, 0) = 0, \\ u_x(0, t) - hu(0, t) = -h\mu(t). \end{array} \right.$$

$\triangleleft$  Перейшовши, як у другому способі попереднього прикладу, до лапласових перетворів, дістанемо задачу

$$\left\{ \begin{array}{l} p\tilde{u} = a^2 \tilde{u}_{xx}, \\ \tilde{u}_x(0, p) - h\tilde{u}(0, p) = -h\tilde{\mu}(p), \end{array} \right.$$

з якої знаходимо

$$\tilde{u}(x, p) = \frac{ah}{ah + \sqrt{p}} e^{-\sqrt{p}x/a} \tilde{\mu}(p).$$

Записавши

$$\frac{a}{ah + \sqrt{p}} = \int_0^{\infty} e^{-(h+\sqrt{p}/a)\xi} d\xi,$$

перетворюємо цю рівність до вигляду

$$\tilde{u}(x, p) = h \int_0^{\infty} e^{-h\xi} e^{-(x+\xi)\sqrt{p}/a} d\xi \tilde{\mu}(p). \quad (10.48)$$

Зважаючи на (10.40) і (10.36)

$$e^{-\sqrt{p}x/a} = -2a^2 \int_0^{\infty} e^{-pt} G'(x, t) dt$$

(штрих означає диференціювання по просторовій змінній), так що

$$h \int_0^{\infty} e^{-h\xi} e^{-(x+\xi)\sqrt{p}/a} d\xi = \int_0^{\infty} e^{-pt} R(x, t) dt,$$

де

$$R(x, t) = -2a^2 \int_0^{\infty} e^{-h\xi} G'(x + \xi, t) d\xi.$$

Тоді з (10.48) маємо

$$u(x, t) = \int_0^t R(x, t - \tau) \mu(\tau) d\tau. \triangleright$$

### Приклад 10.10

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f, & 0 < x < l, \\ u(x, 0) = u_0(x), & u_t(x, 0) = u_1(x), \\ u(0, t) = 0, & u(l, t) = 0. \end{cases} \quad (10.49)$$

Хвильове рівняння на відрітку ми вже розв'язували в § 3 методом відокремлення змінних. Розв'яжемо його тепер методом біжучої хвилі, математично еквівалентним застосуванню формули Даламбера до функцій, заданих початково на відрітку і продовжених спеціальним чином на всю пряму.

◁ У прикладі 10.4, маючи тільки першу з межових умов (10.49), ми продовжували функції  $u_0$ ,  $u_1$  і  $f(\cdot, t)$  через лівий (і єдиний) кінець променя непарним чином, тобто так, щоб початок координат був центром симетрії їхніх графіків. Тепер же, маючи дві межові умови, обидві першого роду, продовжуємо функції так, щоб центрами симетрії графіків були обидва кінці відрізка  $[0, l]$  на осі абсцис. Аналітично ця властивість довільної функції  $\varphi$  на  $\mathbb{R}$  виражається рівностями

$$\varphi(-x) = -\varphi(x), \quad \varphi(l-x) = -\varphi(l+x), \quad (10.50)$$

з яких випливає  $2l$ -періодичність ( $\varphi(x-l) = -\varphi(l-x) = \varphi(x+l)$ ). За такого продовження при вільних коливаннях необмеженої струни кінці відрізка  $[0, l]$  залишатимуться нерухомими, тож при  $0 < x < l$  формула Даламбера даватиме розв'язок поставленої крайової задачі. Залишається, як і в прикладі 10.4, виключити ті значення аргументів функцій, які не входять у постановку.

Зафіксуємо в міркуваннях цього абзацу інтегровну на кожному сегменті функцію  $\varphi$  і позначимо  $\int_b^c = \int_b^c \varphi(\xi) d\xi$ . Припустимо, що  $\varphi$  непарна і  $2l$ -періодична. Тоді для будь-якого  $\alpha \in \mathbb{R}$   $\int_{\alpha}^{\alpha+2l} = 0$ , а значить для будь-яких  $b, c \in \mathbb{R}$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$

$$\int_b^c = \int_{b-2ml}^{c-2nl} \equiv \int_{b-2ml}^l - \int_{c-2nl}^l.$$

Вибравши  $m$  і  $n$  так, щоб нижні межі в останніх двох інтегралах були менші за  $l$  і не більші за  $-l$ , і скориставшись впливаючою з непарності  $\varphi$  рівністю  $\int_{\alpha}^{|\alpha|} = 0$ , одержимо

$$\int_b^c = \int_{|b-2ml|}^l - \int_{|c-2nl|}^l \equiv \int_{|b-2ml|}^{|c-2nl|} \quad (10.51)$$

(нижня межа може бути більшою за верхню). Сформульоване вище правило вибору числа  $m$  виражається нерівностями

$$-l \leq b - 2ml < l.$$

Записавши їх у формі

$$2ml \leq b + l < 2(m+1)l,$$

бачимо, що  $m = [b/2l + 1/2]$ , де  $[\alpha]$  – ціла частина  $\alpha$  (а  $\{\alpha\}$  нижче – дробова частина  $\alpha$ ). Звідси, позначивши

$$\chi(\alpha) = 2l\{\alpha/2l + 1/2\} - l, \quad (10.52)$$

(графік цієї функції зображено на рис. 1), одержуємо

$$b - 2ml \equiv 2l(b/2l + 1/2 - m - 1/2) = \chi(b) \quad (10.53)$$

і, аналогічно,  $c - 2nl = \chi(c)$ , що перетворює рівність (10.51) до вигляду

$$\int_b^c = \int_{|\chi(b)|}^{|\chi(c)|}. \quad (10.54)$$

Також із (10.53) і  $2l$ -періодичності  $\varphi$  маємо

$$\varphi(b) = \varphi(\chi(b)), \quad (10.55)$$

а з непарності  $\varphi$  і  $\chi$  –

$$\varphi(\chi(b)) = \varphi(|\chi(b)|)(-1)^{[b/l]}. \quad (10.56)$$

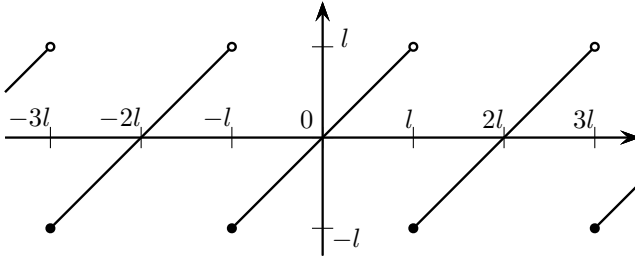


Рис. 1. Графік функції  $\chi$ .

Рівності (10.54) – (10.56) перетворюють формулу Даламбера з непарними  $2l$ -періодичними функціями  $u_0$ ,  $u_1$  і  $f(\cdot, t - \tau)$  до вигляду

$$u(x, t) = \frac{u_0(|\chi(x + at)|)(-1)^{[(x+at)/l]} + u_0(|\chi(x - at)|)(-1)^{[(x-at)/l]}}{2} + \frac{1}{2a} \int_{|\chi(x-at)|}^{|\chi(x+at)|} u_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{|\chi(x-a\tau)|}^{|\chi(x+a\tau)|} f(\xi, t - \tau) d\xi.$$

Ця рівність спільно з (10.52) (або рис. 2) дає відповідь.  $\triangleright$

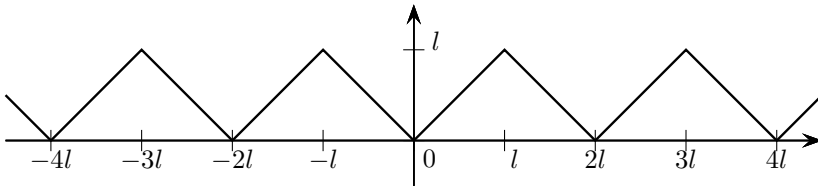


Рис. 2. Графік функції  $|\chi|$ .

**Приклад 10.11.** Виразити функцію Гріна рівняння дифузії або коливань на відрізку  $[0, l]$  з межевою умовою першого роду на лівому кінці і другого на правому через функцію Гріна цього ж рівняння на прямій.

У деталях це звучить так (формулюємо окремо для кожного з двох рівнянь).

1. Нехай  $G = G(x, t)$  – функція на  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  така, що розв’язок задачі (9.1) на прямій дається формулою (9.2) з  $d = 1$ . Виразити через неї

функцію  $G_{12} = G_{12}(x, \xi, t)$  на  $[0, l]^2 \times \mathbb{R}_+$  таку, що розв'язок задачі

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0 \end{cases} \quad (10.57)$$

на  $[0, l]$  дається формулою

$$u(x, t) = \int_0^l G_{12}(x, \xi, t) u_0(\xi) d\xi + \int_0^t d\tau \int_0^l G_{12}(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi. \quad (10.58)$$

**2.** Нехай  $G$  – функція на  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  така, що розв'язок задачі (10.1) на прямій дається формулою (10.3). Виразити через неї функцію  $G_{12}$  на  $[0, l]^2 \times \mathbb{R}_+$  таку, що розв'язок задачі

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \\ u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0 \end{cases} \quad (10.59)$$

на  $[0, l]$  дається формулою

$$\begin{aligned} u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l G_{12}(x, \xi, t) u_0(\xi) d\xi + \int_0^l G_{12}(x, \xi, t) u_1(\xi) d\xi \\ + \int_0^t d\tau \int_0^l G_{12}(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi. \end{aligned} \quad (10.60)$$

$\triangleleft$  Продовжимо функції  $u_0, f(\cdot, t)$  і (в задачі (10.59))  $u_1$  на всю пряму непарним чином через лівий кінець відрізка і парним через правий, тобто так, щоб для їхніх графіків початок координат був центром симетрії, а вертикальна пряма  $x = l$  – віссю симетрії. Аналітично ця властивість довільної функції  $\varphi$  на  $\mathbb{R}$  виражається рівностями (пор. з (10.50))

$$\varphi(-x) = -\varphi(x), \quad \varphi(l - x) = \varphi(l + x). \quad (10.61)$$

Із першої з них маємо  $\varphi(0) = 0$ , а з другої за умови диференційовності  $\varphi$  в точці  $l$

$$\varphi'(l) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(l + h) - \varphi(l - h)}{2h} = 0.$$

Тому розв'язок задачі (9.1) або ж (10.1) на всій прямій з так продовженим  $u_j$  і  $f(\cdot, t)$  автоматично задовольняє межові умови задачі (10.57) і (10.59).

Також із рівностей (10.61) маємо  $\varphi(x + 2l) \equiv \varphi(l + l + x) = \varphi(l - (l + x)) = -\varphi(x)$ , звідки  $\varphi(x + 2kl) = (-1)^k \varphi(x)$ . Це дозволяє перетворити

перший доданок у (9.2) так:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, t) u_0(\xi) d\xi &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{(2k-1)l}^{(2k+1)l} G(x - \xi, t) u_0(\xi) d\xi \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-l}^l G(x - \xi - 2kl, t) u_0(\xi + 2kl) d\xi \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \left[ \int_{-l}^0 G(x - \xi - 2kl, t) u_0(\xi) d\xi + \int_0^l G(x - \xi - 2kl, t) u_0(\xi) d\xi \right].
 \end{aligned}$$

Аналогічно перетворюється другий доданок у (9.2) і всі три в (10.3). Тепер зробивши в  $\int_{-l}^0$  заміну  $\xi = -\xi'$  і скориставшись непарністю продовжень, записуємо розв'язки задач (10.57) і (10.59) у формах (10.58) і (10.60) відповідно, де, в обох випадках,

$$G_{12}(x, \xi, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k [G(x - \xi - 2kl, t) - G(x + \xi - 2kl, t)]. \triangleright \quad (10.62)$$

**Зауваження.** Виводячи вираз функції  $G_{12}$ , ми внесли нескінченну суму під знак інтеграла. Для хвильового рівняння це обґрунтовується тим, що, як видно з (10.4), сума в (10.62) містить тільки скінченне число ненульових доданків. Для рівняння дифузії рівність (9.4) показує, що при всіх  $x$  і  $t$  ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k [G(x - \xi - 2kl, t) - G(x + \xi - 2kl, t)] u_0(\xi)$$

за мажорантною ознакою Вейерштраса збігається рівномірно по  $\xi \in [0, l]$ , а значить його можна, за відомою теоремою математичного аналізу, почленно інтегрувати.

Розв'язати задачу Коші:

1.  $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \theta(x)e^{-x}. \end{cases}$
2.  $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \\ u(x, 0) = 0, \\ u_t(x, 0) = \theta(\pi - |x|) \sin x. \end{cases}$
3.  $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + e^{-|x|}, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$
4.  $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2e^{-|x|} \cos t, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$
5.  $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \theta(x), \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$
6.  $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \theta(1 - |x|), \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$
7.  $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + g(t) \delta(x - bt), \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$

Розв'язати крайову задачу на півпрямій:

- |   |  |
|---|--|
| <b>8.</b> $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(x, 0) = 0, \\ u_x(0, t) = \mu(t). \end{cases}$                | <b>10.</b> $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \\ u_x(0, t) - hu(0, t) = -h\mu(t). \end{cases}$     |
| <b>9.</b> $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u_x(0, t) - hu(0, t) = 0. \end{cases}$ | <b>11.</b> $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u_t(x, 0) = u_1(x), \\ u_x(0, t) - hu(0, t) = 0. \end{cases}$ |

Розв'язати крайову задачу на відрізьку:

- |   |   |
|---|---|
| <b>12.</b> $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t). \end{cases}$     | <b>14.</b> $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = \mu_1(t), \quad u_x(l, t) = \mu_2(t). \end{cases}$ |
| <b>13.</b> $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \\ u_x(0, t) = \mu_1(t), \quad u_x(l, t) = \mu_2(t). \end{cases}$ | <b>15.</b> $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \\ u_x(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t). \end{cases}$ |

**16.** Виразити функцію Гріна  $G_{11}$  рівняння дифузії або коливань на відрізьку  $[0, l]$  з межевою умовою першого роду на обох кінцях через функцію Гріна цього ж рівняння на прямій.

**17.** Виразити функцію Гріна  $G_{21}$  рівняння дифузії або коливань на відрізьку  $[0, l]$  з межевою умовою другого роду на лівому кінці і першого на правому через функцію Гріна цього ж рівняння на прямій.

**18.** Виразити функцію Гріна  $G_{22}$  рівняння дифузії або коливань на відрізьку  $[0, l]$  з межевою умовою другого роду на обох кінцях через функцію Гріна цього ж рівняння на прямій.

Виразити через функцію Гріна  $G_{ij}$  розв'язок крайової задачі на  $[0, l]$ :

- |   |   |
|---|---|
| <b>19.</b> $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t). \end{cases}$     | <b>21.</b> $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = \mu_1(t), \quad u_x(l, t) = \mu_2(t). \end{cases}$ |
| <b>20.</b> $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(x, 0) = 0, \\ u_x(0, t) = \mu_1(t), \quad u_x(l, t) = \mu_2(t). \end{cases}$ | <b>22.</b> $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(x, 0) = 0, \\ u_x(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t). \end{cases}$ |

Знайти функцію Гріна рівняння на прямій:

**23.**  $u_{tt} + \gamma u_t = a^2 u_{xx}$  (рівняння згасаючих хвиль).

**24.**  $u_{tt} + \gamma u_t = a^2 u_{xx} + cu$  (телеграфне рівняння).

**25.**  $iu_t = -a^2 u_{xx}$  (рівняння Шредінгера для вільної частинки).

**26.**  $iu_t = -a^2 u_{xx} - bxu$  (рівняння Шредінгера для частинки в однорічному полі).

**27.**  $iu_t = -a^2 u_{xx} + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 u$  (рівняння Шредінгера для осцилятора).

Розв'язати задачу Коші:

$$\mathbf{28.} \left\{ \begin{array}{l} iu_t = -a^2 u_{xx} - bxu, \\ u(x, 0) = \exp(-x^2 + ikx). \end{array} \right. \quad \mathbf{29.} \left\{ \begin{array}{l} iu_t = -a^2 u_{xx} + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 u, \\ u(x, 0) = \exp(-x^2 + ikx). \end{array} \right.$$

## § 11. Хвильове рівняння в $\mathbb{R}^d$

Розв'язок задачі Коші

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} = a^2 \Delta_d u + f, \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \\ u_t(\mathbf{x}, 0) = u_1(\mathbf{x}) \end{array} \right. \quad (11.1)$$

в  $\mathbb{R}^d$  дається: при  $d = 3$  – формулою Кірхгофа

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \left[ \frac{1}{t} \int_{|\xi|=at} u_1(\mathbf{x} - \xi) d\sigma(\xi) + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{t} \int_{|\xi|=at} u_0(\mathbf{x} - \xi) d\sigma(\xi) + \int_{|\xi| \leq at} \frac{f(\mathbf{x} - \xi, t - |\xi|/a)}{|\xi|} d\xi \right], \quad (11.2)$$

при  $d = 2$  – формулою Пуассона

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi a} \left[ \int_{|\xi| \leq at} \frac{u_1(\mathbf{x} - \xi)}{\sqrt{a^2 t^2 - |\xi|^2}} d\xi + \frac{\partial}{\partial t} \int_{|\xi| \leq at} \frac{u_0(\mathbf{x} - \xi)}{\sqrt{a^2 t^2 - |\xi|^2}} d\xi + \int_0^t d\tau \int_{|\xi| \leq a\tau} \frac{f(\mathbf{x} - \xi, t - \tau)}{\sqrt{a^2 \tau^2 - |\xi|^2}} d\xi \right], \quad (11.3)$$

при  $d = 1$  – формулою Даламбера (10.2).

Очевидні рівності

$$\begin{aligned} \int_{|\xi| \leq R} P(\xi) Q(\mathbf{x} - \xi) d\xi &= \int_{|\xi - \mathbf{x}| \leq R} P(\mathbf{x} - \xi) Q(\xi) d\xi, \\ \int_{|\xi|=R} P(\xi) Q(\mathbf{x} - \xi) d\sigma(\xi) &= \int_{|\xi - \mathbf{x}|=R} P(\mathbf{x} - \xi) Q(\xi) d\sigma(\xi) \end{aligned}$$



дають еквівалентні форми запису інтегралів у (11.2) і (11.3), чим ми далі користуватимемось без пояснень.

Рівності (11.2) і (11.3) є, як і (10.2), окремими випадками загальної формули

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^d} G(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, t) u_0(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} + \int_{\mathbb{R}^d} G(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, t) u_1(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \\ + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} G(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, t - \tau) f(\boldsymbol{\xi}, \tau) d\boldsymbol{\xi}, \quad (11.4)$$

яка дає розв'язок задачі Коші (11.1) в просторі  $\mathbb{R}^d$  довільної розмірності (у § 10 ми записували її для випадку  $d = 1$ ). Функція  $G$  називається функцією Гріна оператора  $\square_d = \partial/\partial t - a^2 \Delta_d$ .

### Приклад 11.1

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} = a^2 \Delta_d u + F(\mathbf{b}\mathbf{x}, t), \\ u(\mathbf{x}, 0) = U_0(\mathbf{b}\mathbf{x}), \\ u_t(\mathbf{x}, 0) = U_1(\mathbf{b}\mathbf{x}) \end{array} \right.$$

( $\mathbf{b}$  – сталий вектор).

◁ Як і в аналогічному прикладі 9.10, шукаємо розв'язок задачі у вигляді

$$u(\mathbf{x}, t) = U(\mathbf{b}\mathbf{x}, t), \quad (11.5)$$

де  $U$  – розв'язок задачі

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{tt} = (ba)^2 U_{xx} + F(x, t), \\ U(x, 0) = U_0(x), \\ U_t(x, 0) = U_1(x) \end{array} \right.$$

(нагадаємо позначення  $b = |\mathbf{b}|$ ). Записавши  $U$  за формулою Даламбера, одержимо з урахуванням (11.5) відповідь

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{U_0(\mathbf{b}\mathbf{x} + bat) + U_0(\mathbf{b}\mathbf{x} - bat)}{2} \\ + \frac{1}{2ba} \int_{b\mathbf{x}-bat}^{b\mathbf{x}+bat} U_1(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} + \frac{1}{2ba} \int_0^t d\tau \int_{b\mathbf{x}-ba\tau}^{b\mathbf{x}+ba\tau} F(\boldsymbol{\xi}, t - \tau) d\boldsymbol{\xi}. \triangleright \quad (11.6)$$

### Приклад 11.2

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} = a^2 \Delta u + te^{b\mathbf{x}}, \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_t(\mathbf{x}, 0) = 0. \end{array} \right.$$

◁ Перший спосіб. За формулою Кірхгофа

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{e^{b\mathbf{x}}}{4\pi a^2} \int_{|\boldsymbol{\xi}| \leq at} \frac{(t - |\boldsymbol{\xi}|/a) e^{-b\boldsymbol{\xi}}}{|\boldsymbol{\xi}|} d\boldsymbol{\xi}.$$

Перейдемо в цьому інтегралі до сферичних координат, міряючи широту  $\vartheta$  від напрямку вектора  $\mathbf{b}$ , так що  $\mathbf{b}\boldsymbol{\xi} = b\rho \cos \vartheta$ , де  $\rho = |\boldsymbol{\xi}|$ . Оскільки підінтегральна функція від довготи  $\phi$  не залежить, то інтегрування по  $\phi$  рівносильне множенню інтеграла на  $2\pi$ , тож

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{e^{b\mathbf{x}}}{2a^3} \int_0^{at} (at - \rho) \rho d\rho \int_0^\pi e^{-b\rho \cos \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta = \frac{e^{b\mathbf{x}}}{ba^3} \int_0^{at} (at - \rho) \operatorname{sh} b\rho d\rho.$$

Проінтегрувавши частинами ( $\operatorname{sh} b\rho d\rho = b^{-1} d \operatorname{ch} b\rho$ ), одержуємо відповідь

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{e^{b\mathbf{x}}}{(ba)^2} \left( \frac{\operatorname{sh} bat}{ba} - t \right). \quad (11.7)$$

**Другий спосіб.** Цей приклад є конкретизацією попереднього:  $U_0 = U_1 = 0$ ,  $F(x, t) = te^x$ . Підставивши ці вирази в (11.6), дістанемо

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2ba} \int_0^t (t - \tau) d\tau \int_{b\mathbf{x} - ba\tau}^{b\mathbf{x} + ba\tau} e^{-b\boldsymbol{\xi}} d\boldsymbol{\xi} = \frac{e^{b\mathbf{x}}}{ba} \int_0^t (t - \tau) \operatorname{sh} ba\tau d\tau,$$

що через інтегрування частинами приводить до (11.7).

**Третій спосіб** (пор. з прикладами 9.1–9.3 і 9.6). Застосування оператора  $\Delta_3$  до функції  $e^{b\mathbf{x}}$  рівносильне множенню її на число  $b^2$ . Тому можна шукати розв'язок у вигляді

$$u(\mathbf{x}, t) = T(t)e^{b\mathbf{x}}. \quad (11.8)$$

Підставивши цей вираз у рівняння і скоротивши на  $e^{b\mathbf{x}}$ , дістанемо рівняння для  $T$ :

$$\ddot{T} = (ba)^2 T + t.$$

Приєднуємо до нього нульові, як і для  $u$ , початкові умови і записуємо розв'язок

$$T(t) = \frac{1}{ba} \int_0^t (t - \tau) \operatorname{sh} ba\tau d\tau$$

(інтеграл той самий, що в попередньому способі) отриманої задачі Коші, після чого рівність (11.8) перетворюється на (11.7).  $\triangleright$

### Приклад 11.3

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, \\ u(x, y, z, 0) = 0, \\ u_t(x, y, z, 0) = x^2 yz. \end{cases}$$

$\triangleleft$  За формулою Кірхгофа

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint_{\Sigma} (x - \xi)^2 (y - \eta) (z - \zeta) d\sigma(\xi, \eta, \zeta), \quad (11.9)$$

де  $\Sigma = \{(\xi, \eta, \zeta) : \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = a^2 t^2\} = \{\boldsymbol{\xi} : |\boldsymbol{\xi}| = at\}$ . Очевидно, якщо

хоча б одне з цілих невід'ємних чисел  $k, l, m$  непарне, то  $\iint_{\Sigma} \xi^k \eta^l \zeta^m d\sigma = 0$ .

Тому після розкриття дужок рівність (11.9) набуває вигляду

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \left( 4\pi a^2 t^2 x^2 yz + yz \iint_{\Sigma} \xi^2 d\sigma \right)$$

(множник при  $x^2 yz$  у першому доданку — площа сфери  $\Sigma$ ). Звідси, записавши очевидні рівності

$$\iint_{\Sigma} \xi^2 d\sigma = \iint_{\Sigma} \eta^2 d\sigma = \iint_{\Sigma} \zeta^2 d\sigma = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) d\sigma = \frac{a^2 t^2}{3} \iint_{\Sigma} d\sigma = \frac{4\pi a^4 t^4}{3},$$

одержуємо відповідь:  $u(x, y, z, t) = tx^2 yz + a^2 t^3 yz/3$ .  $\triangleright$

#### Приклад 11.4

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta_3 u + F(|\mathbf{x}|, t), \\ u(\mathbf{x}, 0) = U_0(|\mathbf{x}|), \\ u_t(\mathbf{x}, 0) = U_1(|\mathbf{x}|). \end{cases}$$

$\triangleleft$  Шукаємо розв'язок у вигляді

$$u(\mathbf{x}, t) = U(|\mathbf{x}|, t). \quad (11.10)$$

Пригадавши вираз

$$\Delta_3 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\vartheta\phi}$$

оператора  $\Delta_3$  через його радіальну і кутову частини, бачимо, що функція  $U$  змінних  $r$  і  $t$  повинна задовольняти рівняння

$$U_{tt} = a^2 (U_{rr} + 2r^{-1}U_r) + F(r, t), \quad (11.11)$$

і початкові умови

$$U(r, 0) = U_0(r), \quad U_t(r, 0) = U_1(r). \quad (11.12)$$

Крім того, поклавши у (11.2)  $u_j(\mathbf{x}) = U_j(|\mathbf{x}|)$ ,  $f(\mathbf{x}, t) = F(|\mathbf{x}|, t)$ , бачимо, що для будь-яких додатних  $t$ ,  $R \sup_{|\mathbf{x}| < R} |u(\mathbf{x}, t)| < \infty$ , а значить і

$$\sup_{r < R} |U(r, t)| < \infty. \quad (11.13)$$

Введемо нову функцію  $V(r, t) = rU(r, t)$ . Тоді  $U = r^{-1}V$ ,  $U_r = r^{-1}V_r - r^{-2}V$ ,  $U_{rr} = r^{-1}V_{rr} - 2r^{-2}V_r + 2r^{-3}V$ , тож із (11.11) – (11.13) маємо крайову задачу для  $V$

$$\begin{cases} V_{tt} = a^2 V_{rr} + rF(r, t), & r > 0, \\ V(r, 0) = rU_0(r), & V_t(r, 0) = rU_1(r), \\ V(0, t) = 0, \end{cases}$$

розв'язок якої записуємо за формулою (10.18) з очевидними перепозна-

ченнями і з урахуванням тотожності  $|x| \operatorname{sgn} x = x$ :

$$V(r, t) = \frac{(r + at)U_0(r + at) + (r - at)U_0(|r - at|)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{|r-at|}^{r+at} \rho U_1(\rho) d\rho + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{|r-a\tau|}^{r+a\tau} \rho F(\rho, t - \tau) d\rho.$$

Поділивши обидві частини рівності на  $r$ , дістанемо вираз  $U(r, t)$ . Відтак, перепозначивши  $r$  на  $|x|$  і взявши до уваги (11.10), одержимо відповідь:

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{(|x| + at)U_0(|x| + at) + (|x| - at)U_0(|x| - at)}{2|x|} + \frac{1}{2a|x|} \int_{||x|-at|}^{|x|+at} \rho U_1(\rho) d\rho + \frac{1}{2a|x|} \int_0^t d\tau \int_{||x|-a\tau|}^{|x|+a\tau} \rho F(\rho, t - \tau) d\rho. \triangleright \quad (11.14)$$

### Приклад 11.5

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta_3 u, \\ u(\mathbf{x}, 0) = |\mathbf{x}|^{-1}, \\ u_t(\mathbf{x}, 0) = 0. \end{cases}$$

◁ Перший спосіб. За формулою Кірхгофа

$$u(\mathbf{x}, t) = g_t(\mathbf{x}, t), \quad (11.15)$$

де

$$g(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{\Sigma} \frac{d\sigma(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}|},$$

$\Sigma$  – сфера радіуса  $at$  з центром у нулі. Перейдемо в інтегралі до сферичних координат, відряховуючи широту  $\vartheta$  від напрямку вектора  $\mathbf{x}$ , і позначимо  $r = |\mathbf{x}|$ . Тоді  $d\sigma(\boldsymbol{\xi}) = a^2 t^2 \sin \vartheta d\vartheta d\phi$ , звідки

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}, t) &= \frac{t}{2} \int_0^\pi (r^2 - 2atr \cos \vartheta + a^2 t^2)^{-1/2} \sin \vartheta d\vartheta \\ &= \frac{1}{2ar} \sqrt{r^2 - 2atr \cos \vartheta + a^2 t^2} \Big|_0^\pi = \frac{r + at - |r - at|}{2ar}, \end{aligned}$$

тобто

$$g(\mathbf{x}, t) = \frac{|\mathbf{x}| \wedge at}{a|\mathbf{x}|}.$$

Звідси і з (11.15), записавши

$$\frac{\partial}{\partial t}(|\mathbf{x}| \wedge at) = \begin{cases} a, & t < |\mathbf{x}|/a, \\ 0, & t > |\mathbf{x}|/a, \end{cases}$$

знаходимо

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{\theta(|\mathbf{x}| - at)}{|\mathbf{x}|}.$$

Другий спосіб. Даний приклад є конкретизацією попереднього:  $U_1 = F = 0$ ,  $U_0(\rho) = \rho^{-1}$ . Тому за формулою (11.14)

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1 + \frac{|\mathbf{x}| - at}{||\mathbf{x}| - at|}}{2|\mathbf{x}|} \equiv \frac{\theta(|\mathbf{x}| - at)}{|\mathbf{x}|}. \triangleright$$

### Приклад 11.6

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} = a^2 \Delta u + \frac{x^2 - 3y^2 + 2z^2 + xy}{t^2 + 1}, \\ u(x, y, z, 0) = u_t(x, y, z, 0) = 0. \end{array} \right.$$

$\triangleleft$  Функція  $P(x, y, z) = x^2 - 3y^2 + 2z^2 + xy$  гармонічна:  $\Delta_3 P = 0$ . Тому (пор. з третім способом у прикладі 11.1) можна шукати розв'язок задачі у вигляді

$$u(x, y, z, t) = T(t)P(x, y, z). \quad (11.16)$$

Підставивши цей вираз у рівняння для  $u$  і початкові умови, дістанемо

$$\ddot{T}(t) = (t^2 + 1)^{-1}, \quad T(0) = \dot{T}(0) = 0.$$

Звідси за формулою Тейлора з інтегральним залишковим членом

$$T(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{T^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k + \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{n-1} T^{(n)}(\tau) d\tau$$

(функція відновлюється за похідною  $n$ -го порядку од н о р а з о в и м інтегруванням) знаходимо

$$T(t) = \int_0^t \frac{t - \tau}{\tau^2 + 1} d\tau = t \arctg t - \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1),$$

після чого рівність (11.16) стає відповіддю.  $\triangleright$

### Приклад 11.7

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} = \Delta u, \\ u(x, y, 0) = 0, \\ u_t(x, y, 0) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}. \end{array} \right.$$

$\triangleleft$  Перший спосіб. За формулою Пуассона

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\xi^2 + \eta^2 \leq t^2} \frac{(x - \xi)^2 d\xi d\eta}{\sqrt{t^2 - \xi^2 - \eta^2} ((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2)}.$$

У полярних координатах  $\xi = \rho \cos \phi$ ,  $\eta = \rho \sin \phi$  інтеграл набуває вигля-

ду

$$u(x, y, t) = \int_0^t \frac{\rho d\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(x - \rho \cos \phi)^2 d\phi}{(x - \rho \cos \phi)^2 + (y - \rho \sin \phi)^2} \right).$$

Внутрішній інтеграл обчислюємо за допомогою теорії лишків, переходячи до контурного інтеграла по змінній  $z = e^{i\phi}$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(x - \rho \cos \phi)^2 d\phi}{(x - \rho \cos \phi)^2 + (y - \rho \sin \phi)^2} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} f(z) dz,$$

де

$$f(z) = \frac{\left(x - \rho \frac{z+1/z}{2}\right)^2 z^{-1}}{\left(x - \rho \frac{z+1/z}{2}\right)^2 + \left(y - \rho \frac{z-1/z}{2i}\right)^2} \equiv \frac{(\rho z^2 - 2xz + \rho)^2}{4z^2((x - iy)z - \rho)(x + iy - \rho z)}.$$

В одиничному крузі функція  $f$  має два полюси:

$$z_1 = 0, \quad z_2 = \begin{cases} \rho/(x - iy), & \rho < r, \\ (x + iy)/\rho, & \rho > r, \end{cases}$$

де  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Додавши лишки в цих точках, дістанемо

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(x - \rho \cos \phi)^2 d\phi}{(x - \rho \cos \phi)^2 + (y - \rho \sin \phi)^2} = \frac{1}{2} + \frac{x^2 - y^2}{2r^2} \left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\right)_+.$$

Отже,

$$u(x, y, t) = \int_0^t \left( \frac{1}{2} + \frac{x^2 - y^2}{2r^2} \left(1 - \frac{\rho^2}{r^2}\right)_+ \right) \frac{\rho d\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}}.$$

Раціоналізуюча підстановка  $t^2 - \rho^2 = t^2 s^2$  спрощує цей інтеграл до вигляду

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= t \int_0^1 \left( \frac{1}{2} + \frac{x^2 - y^2}{2r^2} \left(1 - \frac{t^2}{r^2}(1 - s^2)\right)_+ \right) ds \\ &\equiv \frac{t}{2} + t \frac{x^2 - y^2}{2r^2} \int_{\sqrt{(1-r^2/t^2)_+}}^1 \left(1 - \frac{t^2}{r^2}(1 - s^2)\right) ds. \end{aligned}$$

Після рутинних перетворень одержимо відповідь:

$$u(x, y, t) = \frac{tx^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2 - x^2}{3(x^2 + y^2)^2} \left( t^3 - (t^2 - x^2 - y^2)_+^{3/2} \right).$$

Другий спосіб. Записавши в позначеннях попереднього способу

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2} = \cos^2 \phi \equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\phi,$$

бачимо, що в ряді Фур'є функції  $u(r, \cdot, t)$  присутні тільки дві гармоніки:

$$u(r, \phi, t) = U(r, t) + V(r, t) \cos 2\phi.$$

Підставивши цей вираз у рівняння і додаткові умови, одержимо стандартним чином, як у § 5, крайові задачі

$$\left\{ \begin{array}{l} r^2 U_{tt} = r^2 U_{rr} + r U_r, \\ U(r, 0) = 0, \quad U_t(r, 0) = 1/2, \\ U(\cdot, t) \in C^1(\mathbb{R}_+); \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} r^2 V_{tt} = r^2 V_{rr} + r V_r - 4V, \\ V(r, 0) = 0, \quad V_t(r, 0) = 1/2, \\ V(\cdot, t) \in C^1(\mathbb{R}_+). \end{array} \right.$$

Розв'язок першої очевидний:  $U(r, t) = t/2$ . Розв'язок другої шукаємо у вигляді  $V(r, t) = rQ(t/r)$ . Записавши  $V_{tt}(r, t) = r^{-1}Q''(t/r)$ ,  $V_r(r, t) = -r^{-1}Q'(t/r) + Q(t/r)$ ,  $V_{rr}(r, t) = r^{-3}Q''(t/r)$ , бачимо, що  $Q$  повинна бути розв'язком задачі

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - s^2)Q'' + sQ' + 3Q = 0, \\ Q(0) = 0, \quad Q'(0) = 1/2, \\ \sup_{s>0} |Q(s)| < \infty. \end{array} \right. \quad (11.17)$$

Рівняння для  $Q$  разом із початковими умовами не можна розглядати як задачу Коші на  $\mathbb{R}_+$ , бо коефіцієнт при  $Q''$  перетворюється в нуль у точці  $s = 1$  і функція  $(1 - s^2)^{-1}$  неінтегровна в околі одиниці. Тому обмежений на  $\mathbb{R}_+$  розв'язок треба “зшивати” з розв'язку задачі Коші на  $[0, 1[$  і обмеженого на  $]1, \infty[$  розв'язку рівняння.

Рівняння для  $Q$  визначає гіперсферичні многочлени (поліноми Генбауера [1, 3, 14]). У позначеннях задачі 2.17  $a = -3/2$ ,  $m = 0$ ,  $n = 3$ . Отже, одним із розв'язків є

$$Q_1(s) = (s^2 - 1)^{3/2} \frac{d^3}{ds^3} (s^2 - 1)^{3-3/2} \equiv 3s(2s^2 - 3),$$

у чому можна пересвідчитись і безпосередньо. Функція  $-Q_1/18$  задовольняє, очевидно, початкові умови для  $Q$ . Ще один розв'язок рівняння знаходимо за формулою Абеля:  $Q_2(s) = |s^2 - 1|^{3/2}$ . Тепер розв'язок задачі (11.17) шукаємо у вигляді

$$Q(s) = \begin{cases} -Q_1(s)/18, & s < 1, \\ AQ_1(s) + BQ_2(s), & s > 1, \end{cases} \quad (11.18)$$

підбираючи сталі  $A$  і  $B$  так, щоб  $Q$  задовольняла всі накладені на неї умови. Умова зшивання  $Q(1+0) = Q(1-0)$ , дає  $A = -1/18$ , а з умови обмеженості на нескінченності маємо  $B = -6A = 1/3$ . Підставивши знайдені  $A$  і  $B$  у вираз (11.18) і переписавши останній у компактній

формі, дістанемо

$$Q(s) = \frac{s}{2} - \frac{s^3}{3} + \frac{1}{3} (s^2 - 1)_+^{3/2}.$$

Вернувшись до декартових змінних, одержимо ту саму відповідь, що й у першому способі.  $\triangleright$

### Приклад 11.8

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u + I_\nu(\rho) \sin \nu \phi \cos \omega t, \\ u(\rho, \phi, 0) = u_t(\rho, \phi, 0) = 0 \end{cases}$$

( $\omega \neq 0$ ;  $I_\nu$  – модифікована бesselева функція порядку  $\nu$ ).

$\triangleleft$  Позначимо  $g(\rho, \phi) = I_\nu(\rho) \sin \nu \phi$ . Пригадавши вираз оператора  $\Delta$  в полярних координатах, бачимо, що

$$\Delta g(\rho, \phi) = \rho^{-2} (\rho^2 I_\nu''(\rho) + \rho I_\nu'(\rho) - \nu^2 I_\nu(\rho)) \sin \nu \phi.$$

Але за означенням функції  $I_\nu$  вона задовольняє модифіковане рівняння Бесселя

$$\rho^2 I_\nu'' + \rho I_\nu' - \nu^2 I_\nu = \rho^2 I_\nu.$$

Отже,  $\Delta g = g$ , що дозволяє шукати розв'язок задачі у вигляді

$$u(\rho, \phi, t) = T(t)g(\rho, \phi). \quad (11.19)$$

Очевидно, така функція задовольнятиме рівняння і початкові умови задачі, якщо

$$\ddot{T} = a^2 T + \cos \omega t, \quad T(0) = \dot{T}(0) = 0.$$

Розв'язавши стандартним чином цю задачу Коші, знаходимо  $T(t) = \frac{\cos at - \cos \omega t}{a^2 + \omega^2}$ , після чого рівність (11.19) стає відповіддю.  $\triangleright$

**Приклад 11.9** (продовження прикладу 10.1). Побудувати функцію Гріна оператора  $\partial^2/\partial t^2 - a^2 \partial^2/\partial x^2 - \mu^2$ , тобто функцію  $H = H(x, t)$  таку, що розв'язок задачі (10.5) дається формулою (10.6).

$\triangleleft$  Перший спосіб побудови дано в прикладі 10.1.

Другий спосіб [28]. Введемо, збільшивши число просторових змінних, нові функції  $v(x, y, t) = e^{\alpha y} u(x, t)$ ,  $\Psi(x, y) = e^{\alpha y} \psi(x)$ , де, як і в першому способі,  $\alpha = \mu/a$ . Записавши  $v_{xx} = e^{\alpha y} u_{xx}$ ,  $v_{yy} = \alpha^2 e^{\alpha y} u$ , зводимо (10.5) до задачі Коші для  $v$

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 \Delta v, \\ v(x, y, 0) = 0, \\ v_t(x, y, 0) = \Psi(x, y), \end{cases}$$

розв'язок якої записуємо за формулою Пуассона

$$v(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \iint_{\xi^2 + \eta^2 \leq a^2 t^2} \frac{\Psi(x - \xi, y - \eta)}{\sqrt{a^2 t^2 - \xi^2 - \eta^2}} d\xi d\eta.$$



Помноживши обидві частини рівності на  $e^{-\alpha y}$ , перетворимо її до вигляду

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi a} \iint_{\xi^2 + \eta^2 \leq a^2 t^2} \frac{e^{-\alpha \eta} \psi(x - \xi)}{\sqrt{a^2 t^2 - \xi^2 - \eta^2}} d\xi d\eta.$$

Записавши подвійний інтеграл як повторний  $\int \dots d\xi \int \dots d\eta$  і зробивши у внутрішньому інтегралі заміну  $\eta = \sqrt{a^2 t^2 - \xi^2} \cos \phi$ , так що зміні  $\eta$  від  $-\sqrt{a^2 t^2 - \xi^2}$  до  $\sqrt{a^2 t^2 - \xi^2}$  відповідає зміна  $\phi$  від  $\pi$  до  $0$  (на цьому проміжку  $\sin \phi = \sqrt{1 - \cos^2 \phi}$ ), дістанемо

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_{-at}^{at} \psi(x - \xi) d\xi \int_0^\pi e^{-\alpha \sqrt{a^2 t^2 - \xi^2} \cos \phi} d\phi,$$

звідки за формулою (7.16)

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} I_0 \left( \alpha \sqrt{a^2 t^2 - \xi^2} \right) \psi(x - \xi) d\xi.$$

А це і є рівність (10.6) із знайденою в прикладі 10.1  $H$ .  $\triangleright$

Розв'язати задачу Коші для хвильового рівняння:

- |   |   |
|---|---|
| <p>1. <math>\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} = \Delta u + e^{ct}, \\ u(x, y, z, 0) = x^3 - 3xy^2 - \\ \quad 2x^2y + y^3 + 3x^2z - yz^2 - z^3, \\ u_t(x, y, z, 0) = 0. \end{array} \right.</math></p> | <p>7. <math>\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} = a^2 \Delta u + \frac{t}{(t+1)^2} r^2 \sin 2\vartheta \cos \phi, \\ u(r, \vartheta, \phi, 0) = 0, \quad u_t(r, \vartheta, \phi, 0) = 0. \end{array} \right.</math></p> |
| <p>2. <math>\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} = \Delta_3 u, \\ u(\mathbf{x}, 0) = \sin \mathbf{bx}, \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = 0. \end{array} \right.</math></p>                                      | <p>8. <math>\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} = a^2 \Delta u, \\ u(x, y, z, 0) = x J_0 \left( \sqrt{y^2 + z^2} \right), \\ u_t(x, y, z, 0) = 0. \end{array} \right.</math></p>  |
| <p>3. <math>\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} = \Delta_3 u + tz, \\ u(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = e^{\mathbf{bx}}. \end{array} \right.</math></p>                                  | <p>9. <math>\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} = \Delta u + 4e^y J_0(\sqrt{x^2 + z^2}) \cos 2t, \\ u(x, y, z, 0) = 0, \quad u_t(x, y, z, 0) = 0. \end{array} \right.</math></p>  |
| <p>4. <math>\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} = \Delta u + txyz^2, \\ u(x, y, z, 0) = \sin(x - 2y + 2z), \\ u_t(x, y, z, 0) = 0. \end{array} \right.</math></p>                                       | <p>10. <math>\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} = \Delta u, \\ u(x, y, z, 0) = 0, \\ u_t(x, y, z, 0) = I_0 \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right) \sin z. \end{array} \right.</math></p>                                      |
| <p>5. <math>\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} = \Delta u + e^{-t} x^2 y, \\ u(x, y, z, 0) = \frac{1}{1+(2x-y-2z)^2}, \\ u_t(x, y, z, 0) = 0. \end{array} \right.</math></p>                           | <p>11. <math>\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} = \Delta u + \frac{e^y}{(t+1)^2} J_0 \left( \sqrt{x^2 + z^2} \right), \\ u(x, y, z, 0) = 0, \quad u_t(x, y, z, 0) = 0. \end{array} \right.</math></p>                  |
| <p>6. <math>\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} = \Delta u, \\ u(r, \vartheta, \phi, 0) = 0, \\ u_t(r, \vartheta, \phi, 0) = r \sin \vartheta \sin \phi. \end{array} \right.</math></p>                 | <p>12. <math>\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} = \Delta u + e^x y^2 z^2 \sin t, \\ u(x, y, z, 0) = 0, \quad u_t(x, y, z, 0) = 0. \end{array} \right.</math></p>   |
|   | <p>13. <math>\left\{ \begin{array}{l} u_{tt} = \Delta_3 u, \\ u(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad u_t(\mathbf{x}, 0) =  \mathbf{x} . \end{array} \right.</math></p>   |

$$14. \begin{cases} u_{tt} = \Delta_3 u + e^{t+b\mathbf{x}}, \\ u(\mathbf{x}, 0) = |\mathbf{x}|^2, \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = 0. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, \\ u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = \frac{x}{y^2+1}. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} u_{tt} = \Delta_3 u + \cos(t + b\mathbf{x}), \\ u(\mathbf{x}, 0) = (1 + |\mathbf{x}|^2)^{-1/2}, \\ u_t(\mathbf{x}, 0) = 0. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} u_{tt} = \Delta u, \\ u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = e^x y^2. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} u_{tt} = \Delta u + t(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}, \\ u(x, y, z, 0) = 0, \\ u_t(x, y, z, 0) = (x + y - z)^2. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} u_{tt} = \Delta u + tx^2 \cos y, \\ u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = 0. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} u_{tt} = \Delta_3 u + (|\mathbf{x}| + t)^{-1}, \\ u(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = 0. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} u_{tt} = \Delta u + t(6x + 8y)^2, \\ u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = xy^2. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} u_{tt} = \Delta u + \frac{x^4 - 6x^2 y^2 + y^4}{t+1}, \\ u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = 0. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} u_{tt} = \Delta u + x e^{ty}, \\ u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = 0. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, \\ u(x, y, 0) = x^2 + y^2, \quad u_t(x, y, 0) = 0. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} u_{tt} = \Delta u + \frac{ty}{x^2+1}, \\ u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = 0. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} u_{tt} = 210\Delta u + 6tx^2y^2, \\ u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = 0. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} u_{tt} = \Delta u, \\ u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = \frac{x \cos y}{x^2+1}. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} u_{tt} = \Delta u + 15\sqrt{t}, \\ u(\rho, \phi, 0) = I_\nu(\rho) \cos \nu\phi - 1, \\ u_t(\rho, \phi, 0) = 0. \end{cases}$$

$$31. \begin{cases} u_{tt} = \Delta u, \\ u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = \frac{xy}{x^2+y^2}. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} u_{tt} = \Delta u + 2I_0(\rho) \operatorname{ch} t, \\ u(\rho, \phi, 0) = 0, \quad u_t(\rho, \phi, 0) = 0. \end{cases}$$

$$32. \begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta_d u + g(t) \delta(\mathbf{x} - b\mathbf{t}), \\ u(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = 0. \end{cases}$$

Розглянути випадки  $d = 1, 2, 3$ .

33. Побудувати функцію Гріна оператора  $\partial^2/\partial t^2 - a^2 \Delta_2 - \mu^2$ .

34. Побудувати функцію Гріна оператора  $\partial^2/\partial t^2 - a^2 \Delta_2 + \mu^2$ .

## § 12. Рівняння еліптичного типу в $\mathbb{R}^d$

У цьому параграфі використовуємо такі позначення:  $r = |\mathbf{x}|$ ,  $\rho = |\boldsymbol{\xi}|$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{x}/r$ ,  $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\xi}/\rho$ ,  $\cos \vartheta = \mathbf{n}\boldsymbol{\nu}$ ,  $\sigma_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$  – площа сфери  $S^{d-1}$ .

Розв'язок рівняння еліптичного типу в області  $D$  з межевою умовою першого роду

$$\begin{cases} \mathbf{L}u = f, \\ u|_{\partial D} = \varphi, \end{cases} \quad (12.1)$$

де  $\mathbf{L} = \nabla \cdot (p\nabla) - q$ , дається формулою

$$u(\mathbf{x}) = \int_D G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) f(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} + \int_{\partial D} H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \varphi(\boldsymbol{\xi}) d\sigma(\boldsymbol{\xi}), \quad (12.2)$$

де

$$H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}_{\boldsymbol{\xi}}}, \quad (12.3)$$

а  $G$  – розв’язок крайової задачі

$$\left\| \begin{array}{l} \mathbf{L}_x G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}), \\ G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})|_{\mathbf{x} \in \partial D} = 0. \end{array} \right. \quad (12.4)$$

Функцію  $G$  називають *функцією Гріна* задачі (12.1), а  $H$  – *функцією впливу межових умов* або *поверхневою функцією Гріна*. Для випадку межових умов другого або третього роду формула (12.2) залишається в силі, змінюється тільки вираз  $H$ . Зокрема, для межових умов другого роду

$$H = G, \quad (12.5)$$

а межева умова в задачі (12.4) змінюється на таку<sup>3</sup>:

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{\mathbf{x} \in \partial D} = 0. \quad (12.6)$$

У випадку оператора Лапласа в  $\mathbb{R}^d$  функція Гріна має вигляд  $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = G_d(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|)$ , де

$$G_d(r) = -\frac{1}{\sigma_d} \begin{cases} \ln \frac{1}{r}, & d = 2, \\ \frac{1}{(d-2)r^{d-2}}, & d \geq 3. \end{cases} \quad (12.7)$$

Щоб побудувати функцію Гріна, потрібно або розв’язати задачу для самої функції Гріна або знайти розв’язок крайової задачі з невизначеними правими частинами. Якщо відома функція Гріна ширшої області  $\tilde{D} \supset D$ , то функцію Гріна області  $D$  можна шукати у вигляді

$$G = \tilde{G} + g, \quad (12.8)$$

де  $g$  – розв’язок крайової задачі

$$\left\| \begin{array}{l} \mathbf{L}_x g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = 0, \\ g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})|_{\mathbf{x} \in \partial D} = -\tilde{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \Big|_{\mathbf{x} \in \partial D} \end{array} \right. \quad (12.9)$$

(і аналогічно для межових умов іншого роду).

До задач з високою симетрією застосовний спеціальний метод, який умовно називають методом зображень. Нехай множина розв’язків рівняння  $\mathbf{L}u = 0$  інваріантна відносно деякого перетворення  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^*$ , тобто якщо  $u(\mathbf{x})$  – розв’язок, то  $A(\mathbf{x})u(\mathbf{x}^*(\mathbf{x}))$  – також розв’язок, причому множина нерухомих точок перетворення є межею деякої області  $D \subset \mathbb{R}^d$ , і  $A(\mathbf{x}) = 1$  при  $\mathbf{x} \in \partial D$ . Тоді, якщо  $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  – функція Гріна  $\mathbb{R}^d$ , то

$$\tilde{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - A(\mathbf{x})G(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\xi})$$

<sup>3</sup>У деяких випадках крайова задача з межовими умовами другого роду має розв’язок не для будь-якої правої частини. Тоді функція Гріна визначається інакше (див. приклад 12.7).

буде функцією Гріна області  $D$  (а також її доповнення до  $\mathbb{R}^d$ ) з межовими умовами першого роду. Наприклад, якщо інваріантним перетворенням є відзеркалення в гіперплощині  $I \equiv 1$ , то

$$\tilde{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \mp G(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\xi}) \quad (12.10)$$

буде функцією Гріна півпростору з межовими умовами першого (верхній знак) і другого (нижній знак) роду (це чи не єдиний приклад, коли метод застосовний до задачі з межовими умовами другого роду). Зауважимо, що у випадку, коли  $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = G(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|)$ , у формулі (12.10) маємо

$$G(|\mathbf{x}^*(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\xi}|) = G(|\mathbf{x}^*(\mathbf{x}^*(\mathbf{x})) - \mathbf{x}^*(\boldsymbol{\xi})|) = G(|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*(\boldsymbol{\xi})|),$$

а тому другий доданок у (12.10) можна інтерпретувати як потенціал заряду, розташованого симетрично відносно гіперплощини — звідси назва методу. Наведена схема легко узагальнюється на випадок кількох гіперплощин (приклади 12.1–12.3).

Функцію Гріна оператора Лапласа у двовимірній області з межевою умовою першого роду можна будувати методом конформних відображень. Для цього точки площини ототожнюють із комплексними числами. В основі методу лежить таке твердження: нехай  $G$  — функція Гріна області  $D$  і  $w$  — функція конформного відображення області  $D'$  на область  $D$ , тоді

$$G'(z, \zeta) = G(w(z), w(\zeta)) \quad (12.11)$$

— функція Гріна області  $D'$ . За  $G$  можна взяти відому функцію Гріна півплощини:

$$G(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z - \zeta}{z - \bar{\zeta}} \right|.$$

До задач еліптичного типу зводяться і задачі Коші для рівнянь коливань і дифузії в результаті застосування перетворення Лапласа по часовій змінній.

У випадку хвильового рівняння крім задачі Коші

$$\left\{ \begin{array}{l} c^{-2}u_{tt} - \mathbf{L}u = f, \quad t \in \mathbb{R}_+, \mathbf{x} \in D, \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = \varphi, \quad \mathbf{x} \in \partial D, \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = u_1(\mathbf{x}) \end{array} \right. \quad (12.12)$$

у фізичних застосуваннях виникають задачі без початкових умов

$$\left\{ \begin{array}{l} c^{-2}u_{tt} - \mathbf{L}u = f, \quad t \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in D, \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = \varphi, \quad \mathbf{x} \in \partial D, \\ u \text{ не залежить від значень } f \text{ і } \varphi \text{ в майбутні моменти часу.} \end{array} \right. \quad (12.13)$$

Остання умова називається *умовою причинності*, а розв'язки всієї задачі називають *причинними* або *відстаючими*<sup>4</sup>. Їх можна інтерпретувати, як асимптотичний при  $t \rightarrow +\infty$  розв'язок задачі Коші, в якому, очевидно, втрачається

<sup>4</sup> Антонім до слова *випереджаючі*.

інформація про початкові умови. Розв'язки обох задач можна записати через функцію Гріна таким чином:

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^t d\tau \int_D G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t - \tau) f(\boldsymbol{\xi}, \tau) d\boldsymbol{\xi} + \int_{-\infty}^t d\tau \int_{\partial D} H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t - \tau) \varphi(\boldsymbol{\xi}, \tau) d\sigma(\boldsymbol{\xi}) \\ + \frac{\partial}{\partial t} \int_D G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) u_0(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} + \int_D G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) u_1(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \quad (12.14)$$

причому для задачі Коші треба обнулити  $f$  і  $\varphi$  при від'ємних значеннях часового аргументу, а для задачі з умовою причинності слід покласти  $u_0 = u_1 = 0$ .

Перетворення Лапласа незастосовне до задачі (12.13), оскільки часова змінна пробігає всю числову вісь. У цьому випадку використовують перетворення Фур'є, скориставшись тим, що у (12.14) значення функцій  $G$  і  $H$  при від'ємних значеннях часового аргументу не використовуються. Поклавши його нульовим<sup>5</sup>, можна інтеграли по часовій змінній у (12.14) записати у вигляді згортки, після чого перетвір Фур'є формули (12.14) матиме вигляд:

$$\hat{u}(\mathbf{x}, \omega) = \int_D \hat{G}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) \left[ i\omega u_0(\boldsymbol{\xi}) + u_1(\boldsymbol{\xi}) + \hat{f}(\boldsymbol{\xi}, \omega) \right] d\boldsymbol{\xi} + \int_{\partial D} \hat{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \omega) \hat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}, \omega) d\sigma(\boldsymbol{\xi}),$$

де  $\hat{G}(\cdot, \omega) = \int_0^\infty G(\cdot, t) e^{i\omega t} dt$ . Функція  $\hat{G}$  має кілька очевидних і водночас важливих властивостей: 1)  $\hat{G}$  аналітична у верхній півплощині; 2)  $\hat{G}(\cdot, \omega) \rightarrow 0$  при  $\text{Im } \omega \rightarrow +\infty$  (показниково); 3)  $\hat{G}(\cdot, -\omega) = \overline{\hat{G}(\cdot, \omega)}$ ; 4)  $2\text{Re } \hat{G}$  – перетвір Фур'є фундаментального розв'язку. Перейшовши до перетворів Фур'є в задачі (12.13), одержимо

$$\begin{cases} L\hat{u} + k^2\hat{u} = -\hat{f}, & \mathbf{x} \in D, \\ \alpha \frac{\partial \hat{u}}{\partial n} + \beta \hat{u} = \hat{\varphi}, & \mathbf{x} \in \partial D, \\ \hat{u}(\cdot, \omega) \rightarrow 0 & \text{при } \text{Im } \omega \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (12.15)$$

де  $k = \omega/c$ , а умова причинності для перетвору впливає з властивостей  $\hat{G}$  і обмеженості функцій  $f$  і  $\varphi$ . Обернене перетворення Фур'є здійснюється за формулою

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i0}^{\infty+i0} \hat{F}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

Насамкінець зауважимо, що використання формули (12.2) для розв'язання задачі (12.1) при наперед відомій функції Гріна недоцільне у випадках, коли функції  $f$  і  $\varphi$  мають високу симетрію (приклад 12.8, фактично ж, майже в усіх випадках, коли інтеграл (12.2) береться явно, задачу можна розв'язати простішими методами).

**Приклад 12.1.** Знайти функцію Гріна частини простору  $\mathbb{R}^d$ , обмеженої двома гіперплощинами, що перетинаються під кутом  $\pi/3$  (двогранний кут). Розглянути випадки межових умов першого і другого роду.

<sup>5</sup>Так доозначену функцію Гріна іноді називають *причинною*. Якщо ж зробити парне продовження, то одержимо фундаментальний розв'язок хвильового рівняння.

◁ Зорієнтуємо систему координат так, щоб область задавалась нерівністю  $0 < y < \sqrt{3}x$ . Віддзеркалення в гіперплощинах дають два перетворення, задані матрицями

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma' = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Рівняння Лапласа інваріантне, очевидно, і відносно будь-яких комбінацій цих перетворень, множина яких утворює шестиеlementну групу<sup>6</sup>:  $\{1, c_3, c_3^2, \sigma_y, c_3\sigma_y, c_3^2\sigma_y\}$ , де

$$c_3 = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \equiv \sigma'\sigma_y$$

– матриця повороту на кут  $2\pi/3$ . Умовно кажучи, потрібно розташувати п'ять фіктивних зарядів у точках, одержаних дією перетворень симетрії на точку  $\mathbf{x}$  (рис. 3). Величини зарядів одиничні для межових умов другого роду, а у випадку межових умов першого роду потрібно поміняти знаки зарядів у точках, одержаних невластним перетворенням (непарна кількість віддзеркалень). Отже,

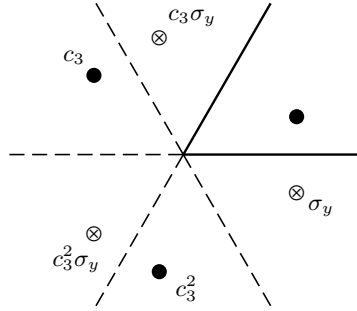


Рис. 3. Розташування фіктивних зарядів.

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{k=0}^2 [G_d(|c_3^k \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|) \mp G_d(|c_3^k \sigma_y \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|)], \quad (12.16)$$

де  $G_d$  дається формулою (12.7), верхній знак відповідає випадку межових умов першого роду на обох площинах, а нижній знак — другого. Перевіряємо межові умови: на першій площині  $\sigma_y \mathbf{x} \equiv \mathbf{x}$ , тоді аргументи в обох доданках суми (12.16) стають однаковими, а значить межові умови задовольняються. На другій  $\sigma_y \mathbf{x} \equiv c_3^{-1} \mathbf{x}$ , і після перегрупування доданків у правій частині суми (12.16) також одержимо ствердну відповідь.

Для задачі з межовими умовами першого роду на одній із площин і другого на іншій, як неважко перекоонатися, неможливо узгоджено підібрати розташування фіктивних зарядів. У цьому випадку, а також у випадку межових умов третього роду задача розв'язується методом відокремлення змінних (див. приклад [5, с. 47] про клин). ▷

**Приклад 12.2.** Знайти функцію Гріна частини тривимірного простору, обмеженої трьома площинами, що перетинаються в одній точці так, що двограний кут між кожними двома дорівнює  $\pi/3$  (тригранний кут). Розглянути випадки межових умов першого і другого роду.

◁ Зорієнтуємо систему координат так, щоб нормалі площин були

<sup>6</sup>Група  $D_3$ , ізоморфна точковій групі  $C_{3v}$ .

напрявлені вздовж  $[011]$ ,  $[101]$  і  $[110]$ , тобто область задавалась нерівностями:  $y + z > 0$ ,  $z + x > 0$ ,  $x + y > 0$ . Маємо три базові перетворення симетрії:

$$\sigma_{yz} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{zx} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{xy} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вони породжують 24-елементну групу симетрій тетраедра  $T_d$  (елементи теорії груп викладено в [13], теорію симетрій — у [26]). Отже,

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{g \in T_d} \frac{(\mp 1)^{P(g)}}{|g\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|},$$

де  $P(g) = 0$  для власних перетворень (обертань) і 1 для невластних (віддзеркалень), а верхній і нижній знаки відповідають межовим умовам першого і другого роду відповідно.  $\triangleright$

**Приклад 12.3.** Знайти функцію Гріна частини простору  $\mathbb{R}^d$ , обмеженої трьома гіперплощинами, які в перерізі перпендикулярною до них площиною утворюють правильний трикутник зі стороною  $a$ . Розглянути випадки межових умов першого і другого роду.

$\triangleleft$  Зорієнтуємо систему координат як у прикладі 12.1. Геометричні побудови показують, що віддзеркалення в трьох площинах і всілякі комбінації їх (група  $P3m1$ ), застосовані до заданої точки, породжують двовимірну ґратку з примітивною коміркою, зображеною на рис. 4. Елементарні вектори трансляції (базис ґратки) такі:  $\mathbf{e}_1 = (a\sqrt{3}/2, -a/2, 0, \dots)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (a/2, a\sqrt{3}/2, 0, \dots)$ . Отже, формально в позначеннях попереднього прикладу

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{g \in P3m1} (\mp 1)^{P(g)} G_d(|g\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|).$$

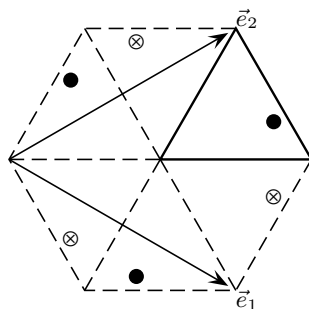


Рис. 4. Розташування фіктивних зарядів.

Виділивши окремо суму по примітивній комірці, одержимо

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} \tilde{G}(\mathbf{x} + n\mathbf{e}_1 + m\mathbf{e}_2, \boldsymbol{\xi}),$$

де  $\tilde{G}$  — функція Гріна (12.16) (збіжність ряду впливає з інтегровності функції  $G_d$ ).  $\triangleright$

**Приклад 12.4** (метод конформних відображень). Знайти функцію Гріна кута  $\pi/\alpha$  на площині.

◁ Відображення  $z \mapsto z^\alpha$  переводить кут у півплощину, отже за формулою (12.11)

$$G(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z^\alpha - \zeta^\alpha}{z^\alpha - \bar{\zeta}^\alpha} \right|,$$

або в полярних координатах

$$G(r, \phi; \rho, \psi) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{r^{2\alpha} + \rho^{2\alpha} - 2r^\alpha \rho^\alpha \cos \alpha(\phi - \psi)}{r^{2\alpha} + \rho^{2\alpha} - 2r^\alpha \rho^\alpha \cos \alpha(\phi + \psi)}.$$

Щоб обчислити функцію впливу межових умов зауважимо, що нормальна похідна на обох сторонах кута — це кутова компонента градієнта. Тому

$$H_1(r, \phi; \rho) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial G}{\partial \psi} \Big|_{\psi=0} \quad \text{і} \quad H_2(r, \phi; \rho) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial G}{\partial \psi} \Big|_{\psi=\pi/\alpha}$$

на нижньому і верхньому променях відповідно. ▷

**Приклад 12.5** (гіперсферичні функції). Розв'язати спектральну задачу для оператора Лапласа на сфері  $S^{d-1}$ .

◁ Позначимо  $n = d - 2$  і запишемо спектральну задачу у вигляді

$$\Delta_n Y + l(l+n)Y = 0,$$

де  $\Delta_n$  — оператор Лапласа на сфері в  $\mathbb{R}^{n+2}$ . Введемо гіперсферичні координати  $(r, \vartheta_n \equiv \vartheta, \vartheta_{n-1}, \dots, \vartheta_1, \vartheta_0 \equiv \phi)$ ,  $\vartheta_k \in [0, \pi]$ ,  $k \geq 1$ ,  $\phi \in [0, 2\pi]$ , за формулами:

$$x_k = r \cos \vartheta_{k-2} \prod_{m=k-1}^n \sin \vartheta_m, \quad k \geq 2, \quad x_1 = r \prod_{m=0}^n \sin \vartheta_m.$$

Оператор Лапласа можна записати в рекурентній формі:

$$\Delta_n = \frac{1}{\sin^n \theta_n} \frac{\partial}{\partial \theta_n} \left( \sin^n \theta_n \frac{\partial}{\partial \theta_n} \right) + \frac{\Delta_{n-1}}{\sin^2 \theta_n}, \quad \left( \Delta_0 = \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right),$$

з якої видно, що змінні повністю відокремлюються в порядку  $\vartheta_0 \rightarrow \vartheta_1 \rightarrow \vartheta_2 \rightarrow \dots$ , а значить власні функції можна записати у вигляді

$$Y_n(\vartheta_n, \vartheta_{n-1}, \dots, \vartheta_1, \phi) = X(\vartheta_n) Y_{n-1}(\vartheta_{n-1}, \dots, \vartheta_1, \phi).$$

Діємо за індукцією. Нехай  $\Delta_{n-1} Y_{n-1} = -l_{n-1}(l_{n-1} + n - 1) Y_{n-1}$ , де  $l_{n-1} \in \mathbb{Z}_+$  (в  $\mathbb{R}^3$  це справджується). Тоді для  $X$  одержимо сингулярну задачу III

$$\frac{1}{\sin^n \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin^n \vartheta \frac{dX}{d\vartheta} \right) + \left( l(l+n) - \frac{l_{n-1}(l_{n-1} + n - 1)}{\sin^2 \vartheta} \right) X = 0,$$



власними елементами якої (див. задачу 2.17) є

$$l \equiv l_n = l_{n-1} + k, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad X(\vartheta) = P_{l_n}^{l_{n-1}, \frac{n-1}{2}}(\cos \vartheta),$$

де  $P_n^{m,a}$  – гіперсферичні квазіполіноми (поліноми від  $\cos \vartheta$  і  $\sin \vartheta$ ):

$$P_n^{m,a}(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n^{0,a}(x)}{dx^m},$$

$$P_n^{0,a}(x) = \frac{(2a+1)_n}{(a+1)_n} \frac{1}{2^n n!} (x^2-1)^{-a} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^{n+a}.$$

Отже,  $\Delta_n Y + l_n(l_n + n)Y = 0$ , де  $l_n \in \mathbb{Z}_+$ , що й треба було довести.

Підсумуємо сказане. Власні функції оператора Лапласа на сфері, відповідаючи власним значенням  $\Delta Y = -l(l+d-2)Y$ , називаються *гіперсферичними функціями* порядку  $l$ . Є всього  $\frac{(2l+d-2)(l+d-3)!}{l!(d-2)!}$  гіперсферичних функцій порядку  $l$ , які переводяться одна в одну поворотами системи координат. Позначатимемо їх  $Y_\lambda$ , де  $\lambda$  – сукупність індексів (включаючи  $l$ ), нумеруючих гіперсферичні функції. Конкретний вибір останніх неоднозначний. Зокрема, в прикладі ми одержали гіперсферичні функції в такому вигляді:

$$Y_\lambda(\mathbf{n}) = Y_{l_{d-2} \dots l_{1m}}(\vartheta_{d-2}, \dots, \vartheta_1, \phi) = \Phi_m(\phi) \prod_{k=1}^{d-2} P_{l_k}^{l_{k-1}, \frac{k-1}{2}}(\cos \vartheta_k),$$

де  $l_{d-2} \equiv l$ ,  $l_0 \equiv |m|$ , індекси  $l_{d-2} \geq \dots \geq l_1 \geq |m| \geq 0$  – цілі числа, а  $\Phi_m$  – тригонометричний базис (у формі  $e^{im\phi}$  або (5.4)). Функція

$$Y_l(\mathbf{n}) \equiv Y_{l0 \dots 0}(\mathbf{n}) = P_l^{0, \frac{d-3}{2}}(\cos \vartheta_{d-2})$$

називається старшою гіперсферичною функцією порядку  $l$ . Зауважимо, що  $P_l^{0, \frac{d-3}{2}}$  є не що інше як поліном Гегенбауера  $C_l^{\frac{d-2}{2}}$  [1, 3, 14].  $\triangleright$

**Приклад 12.6.** Знайти функцію Гріна оператора Лапласа в гіперкулі радіуса  $a$  з межовими умовами першого роду.

$\triangleleft$  Розв'язки рівняння Лапласа інваріантні відносно інверсії в кулі з  $\mathbf{x}^* = (a/r)^2 \mathbf{x}$  і  $A(\mathbf{x}) = (a/r)^{d-2}$ . Отже,

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = G_d(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|) - \left(\frac{a}{r}\right)^{d-2} G_d\left(\left|\frac{a^2}{r^2} \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\right|\right),$$

де  $G_d$  дається формулою (12.7). Знайдемо поверхневу функцію Гріна:

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}}} \Big|_{|\boldsymbol{\xi}|=a} = \frac{1}{\sigma_d} \frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|} \left[ -\frac{\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^d} + \left(\frac{a}{r}\right)^{d-2} \frac{\frac{a^2}{r^2} \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}}{\left|\frac{a^2}{r^2} \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\right|^d} \right]_{|\boldsymbol{\xi}|=a}.$$

Використовуючи тотожність

$$\left| \frac{a^2}{r^2} \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi} \right| \equiv \frac{a}{r} |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| \quad \text{при } |\boldsymbol{\xi}| = a,$$

приведемо цей вираз до остаточного вигляду:

$$\left. \frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n_{\boldsymbol{\xi}}} \right|_{|\boldsymbol{\xi}|=a} = \frac{1}{\sigma_d a} \frac{a^2 - r^2}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^d} \Big|_{|\boldsymbol{\xi}|=a}. \triangleright$$

**Приклад 12.7.** Знайти функцію Гріна для оператора Лапласа в гіперкулі радіуса  $a$  з межовими умовами другого роду.

◁ Почнемо із зауваження. Регулярна крайова задача

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_d u = f, \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial D} = \varphi, \end{array} \right.$$

не завжди має розв'язок, а тільки за очевидної умови

$$\int_{\partial D} \varphi d\sigma = \int_D f dV. \quad (12.17)$$

До того ж, розв'язок її визначений з точністю до адитивної константи. Тому рівняння (12.4) з межевою умовою (12.6) не має розв'язків. Щоб знайти таку функцію Гріна, врахуємо, що вона визначена з точністю до доданка, який є розв'язком крайової задачі з нульовими правими частинами, в даному разі — довільної сталої  $C$ . Виберемо її так, щоб задовольнити умову (12.17):  $\int_{\partial D} C d\sigma = C\sigma(\partial D) = \int_D \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) dV = 1$ . Отже, межеву умову (12.6) слід замінити на таку:

$$\left. \frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n_x} \right|_{\mathbf{x} \in \partial D} = \frac{1}{\sigma(\partial D)}.$$

Вертаючись до нашої задачі, бачимо, що метод зображень у його звичній формі незастосовний, тому скористаємося методом відокремлення змінних, шукаючи функцію Гріна у вигляді суми (12.8). Для  $g$  одержимо крайову задачу

$$\Delta_x g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = 0,$$

$$\left. \frac{\partial g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n_x} \right|_{|\mathbf{x}|=a} = \frac{1}{\sigma_d a^{d-1}} - \left. \frac{\partial G_d(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n_x} \right|_{|\mathbf{x}|=a} \equiv \frac{1}{\sigma_d a^{d-1}} \left( 1 - a^{d-2} \frac{a^2 - \mathbf{x}\boldsymbol{\xi}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^d} \right) \Big|_{|\mathbf{x}|=a}.$$

Спрямуємо полярну вісь гіперсферичних координат уздовж вектора  $\boldsymbol{\xi}$ . Тоді  $\mathbf{x}\boldsymbol{\xi} = r\rho \cos \vartheta$ , а  $|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \vartheta}$ . Як бачимо, права частина межевої умови залежить тільки від кута  $\vartheta$ , тому розв'язок

можна шукати у вигляді

$$g(\mathbf{x}, \cdot) = \sum_{l=0}^{\infty} g_l(r) P_l^{0, \frac{d-3}{2}}(\cos \vartheta),$$

де  $g_l$  задовольняє рівняння

$$\frac{1}{r^{d-1}} \frac{d}{dr} \left( r^{d-1} \frac{dg_l}{dr} \right) - \frac{l(l+d-2)}{r^2} g_l = 0.$$

Його загальний обмежений в околі нуля розв'язок –  $g_l(r) = A_l r^l$ . Щоб розкласти праву частину межевої умови

$$1 - a^{d-2} \frac{a^2 - \mathbf{x}\boldsymbol{\xi}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^d} \Big|_{|\mathbf{x}|=a} = 1 - \frac{1 - ts}{(1 - 2ts + t^2)^{d/2}},$$

де  $t = \rho/a$ ,  $s = \cos \vartheta$ , скористаємось тим, що  $q(t) = (1 - 2ts + t^2)^{-n-1/2}$  – твірна функція поліномів Гегенбауера [1, 3, 14], тобто

$$q(t) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l^{0,n}(s) t^l, \quad |t| < 1. \quad (12.18)$$

У такому вигляді формула непридатна для розкладу. Тотожними перетвореннями досягаємо бажаного результату:

$$\frac{1 - ts}{(1 - 2ts + t^2)^{n+3/2}} \equiv q(t) + \frac{t}{2n+1} \frac{dq}{dt} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l^{0,n}(s) \frac{2n+1+l}{2n+1} t^l.$$

Підставляючи  $n = (d-3)/2$ , одержимо

$$\frac{dg_l}{dr} \Big|_{r=a} = \frac{1}{\sigma_d a^{d-1}} \left[ \delta_{l0} - \frac{d-2+l}{d-2} \left( \frac{\rho}{a} \right)^l \right].$$

Звідси

$$g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{\sigma_d a^{d-2}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{d-2+l}{l(d-2)} \left( \frac{r\rho}{a^2} \right)^l P_l^{0, \frac{d-3}{2}}(\cos \vartheta).$$

Ряд можна підсумувати, розклавши  $\frac{d-2+l}{l(d-2)} = \frac{1}{d-2} + \frac{1}{l}$ . Тоді  $g = g_1 - c_0 + g_2$ , де

$$g_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{-1}{\sigma_d a^{d-2}(d-2)} \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{r\rho}{a^2} \right)^l P_l^{0, \frac{d-3}{2}}(\cos \vartheta) \equiv \left( \frac{a}{r} \right)^{d-2} G_d \left( \left| \frac{a^2}{r^2} \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi} \right| \right),$$

$$g_2(r\mathbf{n}, \boldsymbol{\xi}) = (d-2) \int_0^r \frac{g_1(r'\mathbf{n}, \boldsymbol{\xi}) - c_0}{r'} dr', \quad c_0 = -\frac{1}{\sigma_d a^{d-2}(d-2)},$$

причому інтеграл береться в елементарних функціях.  $\triangleright$

**Приклад 12.8.** Розв'язати тривимірне рівняння Пуассона  $\Delta u = f(r)$ .

$\triangleleft$  Перший спосіб. За формулою (12.2)

$$u(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(\rho)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} d\boldsymbol{\xi}.$$

Перейшовши в інтегралі до сферичних координат, перетворимо цю рівність до вигляду

$$u(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty f(\rho) \rho^2 d\rho \int_0^\pi \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \vartheta}}.$$

Інтеграл по  $\vartheta$  зводиться до такого:

$$\int_{-1}^1 \frac{ds}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho s}} = \frac{2}{r \vee \rho}.$$

Отже,

$$u(\mathbf{x}) = -\int_0^\infty \frac{f(\rho)}{r \vee \rho} \rho^2 d\rho = -\frac{1}{r} \int_0^r f(\rho) \rho^2 d\rho - \int_r^\infty f(\rho) \rho d\rho. \quad (12.19)$$

Другий спосіб. Оскільки задача сферично симетрична, то  $u(\mathbf{x}) = U(r)$ . Підставивши в рівняння, дістанемо:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dU}{dr} \right) = f(r).$$

Розв'язки однорідного рівняння 1 і  $r^{-1}$  з вронскіаном  $W_{1,r^{-1}} = -r^{-2}$  задовольняють ліву (обмеженість в околі нуля) і праву (прямування до нуля при  $r \rightarrow \infty$ ) межову умову відповідно. Тоді, формула (4.16) приводить до (12.19).  $\triangleright$

**Приклад 12.9.** Знайти функцію Гріна нескінченного циліндра одиничного радіуса з межовими умовами першого роду.

$\triangleleft$  Розв'язуємо крайову задачу

$$\begin{cases} \Delta u = f(\rho, \phi, z), \\ u(1, \phi, z) = 0 \end{cases}$$

методом відокремлення змінних. Відокремлюємо в порядку  $\phi \rightarrow \rho \rightarrow z$ , оскільки по змінній  $z$  неможливо записати задачу ШЛ. Розкладаємо розв'язок по власних функціях відповідних задач ШЛ:

$$u(\rho, \phi, z) = \sum_{m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}} u_{nm}(z) J_n(j_{n,m} \rho) \Phi_n(\phi),$$

де  $j_{n,m}$  – нулі функції  $J_n$ . Для коефіцієнтів розкладу одержимо крайову задачу

$$u''_{nm} - j_{n,m}^2 u_{nm} = f_{nm},$$

де

$$f_{nm}(z) = \|R_{nm}\|^{-2} \|\Phi_n\|^{-2} \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} J_n(j_{n,m}\rho) \Phi_n(\phi) f(\rho, \phi, z) d\phi,$$

тут  $\|R_{nm}\|^2 = \int_0^1 J_n(j_{n,m}\rho)^2 \rho d\rho = J'_n(j_{n,m})^2/2$ . Розв'язки  $e^{j_{n,m}z}$  і  $e^{-j_{n,m}z}$  з вронскіаном  $-2j_{n,m}$  задовольняють ліву і праву межові умови, відповідно, тому за формулою (4.16)

$$\begin{aligned} u_{nm}(z) &= -\frac{1}{2j_{n,m}} e^{-j_{n,m}z} \int_{-\infty}^z e^{j_{n,m}z'} f_{nm}(z') dz' \\ &- \frac{1}{2j_{n,m}} e^{j_{n,m}z} \int_z^{\infty} e^{-j_{n,m}z'} f_{nm}(z') dz' \equiv -\frac{1}{2j_{n,m}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j_{n,m}|z-z'|} f_{nm}(z') dz'. \end{aligned}$$

Отже,

$$G(\rho, \phi, z; \rho', \phi', z') = - \sum_{m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}} \frac{J_n(j_{n,m}\rho) \Phi_n(\phi) e^{-j_{n,m}|z-z'|} J_n(j_{n,m}\rho') \Phi_n(\phi')}{j_{n,m} J'_n(j_{n,m})^2 \|\Phi_n\|^2},$$

звідки за формулою додавання тригонометричних функцій

$$G(\rho, \phi, z; \rho', \phi', z') = - \sum_{m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}_+} \frac{J_n(j_{n,m}\rho) J_n(j_{n,m}\rho') \cos n(\phi - \phi') e^{-j_{n,m}|z-z'|}}{\pi (1 + \delta_{n0}) j_{n,m} J'_n(j_{n,m})^2}. \triangleright$$

**Приклад 12.10.** Розв'язати рівняння Гельмгольца  $\Delta u + k^2 u = f$  в  $\mathbb{R}^d$  ( $k > 0$ ).

◁ Розглядана крайова задача має ту особливість, що при  $k^2 > 0$  стандартні межові умови обмеженості на нескінченності не забезпечують єдиності розв'язку. Справді, рівняння Гельмгольца в гіперсферичних координатах має вигляд

$$\frac{1}{r^{d-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^{d-1} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\tilde{\Delta} u}{r^2} + k^2 u = f,$$

де  $\tilde{\Delta}$  – оператор Лапласа на сфері  $S^{d-1}$ . Розклавши  $u$  в ряд по гіперсферичних функціях, дістанемо

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda} R_{\lambda}(r) Y_{\lambda}(\mathbf{n}), \quad (12.20)$$

де

$$f_\lambda(r) = \|Y_\lambda\|^{-2} \int_{S^{d-1}} \overline{Y_\lambda(\mathbf{n})} f(r\mathbf{n}) d\sigma(\mathbf{n}). \quad (12.21)$$

Функції  $R_\lambda$  задовольняють рівняння

$$R''_\lambda + \frac{d-1}{r} R'_\lambda + \left( k^2 - \frac{l(l+d-2)}{r^2} \right) R_\lambda = f_\lambda, \quad (12.22)$$

де  $l$  – порядок  $Y_\lambda$ . Загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння є, як неважко переконатися, функції

$$r^{1-d/2} Z_{d/2-1+l}(kr), \quad (12.23)$$

де  $Z_\nu$  – циліндрична функція. Оскільки будь-яка функція  $Z_\nu(x)$  дійсного індексу на нескінченності має асимптотику  $O(x^{-1/2})$ , то умова обмеженості або будь-яка умова, фіксуюча порядок спадання на нескінченності, не визначають циліндричну функцію з точністю до сталого множника.

На практиці рівняння Гельмгольца з  $k^2 > 0$  виникає як перетвір Фур'є по часовій змінній хвильового рівняння. Тоді згідно з (12.15) його треба доповнити умовою причинності:  $u \rightarrow 0$  при  $\text{Im } k \rightarrow +\infty$ . Єдиною функцією виду (12.23), яка задовольняє цю умову, є функція  $r^{1-d/2} H_{d/2-1+l}^+(kr)$ , де  $H_\nu^+ = J_\nu + iN_\nu$  – функція Ганкеля першого роду. Згідно з (4.16) другий розв'язок треба взяти у вигляді  $r^{1-d/2} J_{d/2-1+l}(kr)$  – він задовольняє умову обмеженості в околі нуля. Вронскіан цієї пари такий:  $W_{JH}(r) = (2i/\pi)r^{1-d}$ . Підставивши в (4.16), одержимо

$$\begin{aligned} R_\lambda(r) = & r^{1-d/2} J_{d/2-1+l}(kr) \frac{\pi}{2i} \int_r^\infty \rho^{d/2} H_{d/2-1+l}^+(k\rho) f_\lambda(\rho) d\rho \\ & + r^{1-d/2} H_{d/2-1+l}^+(kr) \frac{\pi}{2i} \int_0^r \rho^{d/2} J_{d/2-1+l}(k\rho) f_\lambda(\rho) d\rho, \end{aligned}$$

що разом із (12.20) і (12.21) дає відповідь.

Знаючи загальний розв'язок однорідного рівняння Гельмгольца, умову причинності можна замінити наочнішою умовою: у вільній від джерел області при  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$

$$u(\mathbf{x}) \sim A(\mathbf{n}) r^{1/2-d/2} e^{ikr} + u^{\text{ext}}(\mathbf{x}), \quad (12.24)$$

де перший доданок у контексті хвильового рівняння означає наявність на нескінченності тільки йдучої назовні хвилі, а другий – задане зовнішнє поле. Функція кутових змінних  $A$  (в задачі розсіювання її називають амплітудою розсіювання) однозначно визначається функціями  $f$  і  $u^{\text{ext}}$ . ▷

**Приклад 12.11.** Знайти функцію Гріна оператора Гельмгольца  $\Delta + k^2$  в  $\mathbb{R}^d$  ( $k > 0$ ) з умовою причинності.

◁ Розв'язуємо рівняння (12.4). Оскільки задача ізотропна і однорідна, шукаємо функцію Гріна у вигляді  $G(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|)$ . Одержимо рівняння виду (12.22) з  $l = 0$ :

$$G'' + \frac{d-1}{r}G' + k^2G = \delta(r\mathbf{n}).$$

Його розв'язок (12.23), який задовольняє умову причинності, має вигляд  $G(r) = cr^{1-d/2}H_{d/2-1}^+(kr)$ . Сталу  $c$  можна визначити з рівності  $\int_{r<\varepsilon} (\Delta G + k^2G) d\mathbf{x} = 1$ , де  $\varepsilon$  – як завгодно мале додатне число. Тому замість  $G$  можна скористатись еквівалентною в околі нуля функцією:

$$G(r) \sim cr^{1-d/2}iN_{d/2-1}(kr) \sim -\frac{i}{\pi} \left(\frac{k}{2}\right)^{1-d/2} \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) r^{2-d}.$$

Отже,

$$\int_{r<\varepsilon} (\Delta G + k^2G) d\mathbf{x} = - \int_{r=\varepsilon} \nabla G d\sigma(\mathbf{x}) + k^2 \int G d\mathbf{x} = c \, 4i \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{1-d/2} = 1.$$

Відповідь:

$$G(r) = \frac{1}{4i} \left(\frac{k}{2\pi r}\right)^{d/2-1} H_{d/2-1}^+(kr).$$

Порівняння одержаної в попередньому прикладі відповіді з розв'язком, записаним через функцію Гріна, дає розбиття останньої ( $r > \rho$ ):

$$G(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|) = \sum_{\lambda} \frac{\pi}{2i} \|Y_{\lambda}\|^{-2} r^{1-d/2} H_{d/2-1+l}^+(kr) Y_{\lambda}(\mathbf{n}) \times \rho^{1-d/2} J_{d/2-1+l}(k\rho) \overline{Y_{\lambda}(\boldsymbol{\nu})}, \quad (12.25)$$

в якому ліва частина виразу під сумою залежить тільки від  $\mathbf{x}$ , а права тільки від  $\boldsymbol{\xi}$ . Подібні розбиття у фізиці є основою мультипольних розкладів (приклад 12.13).

У деяких задачах (див. приклад 6.3) виникає необхідність розкласти вираз  $G\left(\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \vartheta}\right)$  в ряд по старших гіперсферичних функціях. Щоб зробити це, скористаємося формулою (12.25), зорієнтувавши систему координат таким чином, щоб полярна вісь гіперсферичних координат була напрямлена вздовж  $\boldsymbol{\xi}$ . Тоді при фіксованому  $l$  усі функції  $Y_{\lambda}(\boldsymbol{\nu})$  обнулюються, крім старшої  $Y_{l0\dots 0} = Y_l$  (нагадаємо, що вона зале-

жить тільки від полярного кута  $\vartheta$ ). У результаті (12.25) спрощується:

$$G\left(\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \vartheta}\right) = \frac{\pi}{2i} \sum_{l=0}^{\infty} r^{1-d/2} H_{d/2-1+l}^+(kr) \rho^{1-d/2} J_{d/2-1+l}(k\rho) \frac{Y_l(\vartheta) \overline{Y_l(0)}}{\|Y_l\|^2} \quad (r > \rho).$$

Підставивши явний вираз  $Y_l$ , одержимо остаточно

$$G\left(\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \vartheta}\right) = \frac{\Gamma(d/2 - 1)}{8i\pi^{d/2-1}} \times \sum_{l=0}^{\infty} (d-2+2l) r^{1-d/2} H_{d/2-1+l}^+(kr) \rho^{1-d/2} J_{d/2-1+l}(k\rho) P_l^{0, \frac{d-3}{2}}(\cos \vartheta) \quad (r > \rho).$$

Це одна з так званих формул додавання циліндричних функцій, а (6.20) і (12.18) – граничні випадки її.  $\triangleright$

**Приклад 12.12.** Методом функції впливу знайти причинні розв'язки хвильового рівняння  $c^{-2}u_{tt} - \Delta u = f$  в  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ .

$\triangleleft$  За формулою (12.14) в еквівалентному формулюванні

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_0^\infty d\tau \int_{\mathbb{R}^d} G_d(\boldsymbol{\xi}, \tau) f(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, t - \tau) d\boldsymbol{\xi}. \quad (12.26)$$

Перетвір Фур'є функції Гріна оператора Даламбера співпадає з точністю до знака зі знайденою в прикладі 12.11 функцією Гріна оператора Гельмгольца:

$$\hat{G}_d(r, \omega) \equiv -G_d^{\text{Helm}}(r) = -\frac{1}{4i} \left( \frac{\omega}{2\pi c r} \right)^{d/2-1} H_{d/2-1}^+ \left( \frac{\omega r}{c} \right).$$

Оскільки  $\hat{G}_d(r, \omega) \sim \omega^{d/2}$  при  $\omega \rightarrow \infty$ , то за винятком одно- і двовимірного випадків функція  $G_d$  буде узагальненою. Насправді нас цікавить не сама функція Гріна, а формула (12.26), де вона стоїть у згортці. Тому скористаємось ідеями розмірної регуляризації, які часто використовуються у фізиці: побудуємо  $G_d$  для нижчих розмірностей, а результат у формі (12.26) узагальнимо для всіх  $d$ .

Основою для цього служить рекурентне співвідношення

$$\hat{G}_{d+2n}(r, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^n} \left( -\frac{d}{r dr} \right)^n \hat{G}_d(r, \omega), \quad (12.27)$$

яке неважко вивести з формули диференціювання циліндричних функцій, записаній у формі

$$z^{-\nu-n} Z_{\nu+n} = \left( -\frac{d}{z dz} \right)^n z^{-\nu} Z_{\nu}.$$



Сама формула (12.27) на  $G_d$  не переноситься, але до часової згортки, очевидно, застосовна:

$$G_{d+2n} * \varphi = \frac{1}{(2\pi)^n} \left( -\frac{d}{rdr} \right)^n G_d * \varphi. \quad (12.28)$$

Функцію  $G_d$  для нижчих розмірностей можна одержати використовуючи табличний інтеграл [14, с. 441]

$$\int_a^\infty \frac{e^{i\omega t} dt}{(t^2 - a^2)^{\nu+1/2}} = i \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right) \left(\frac{2\omega}{a}\right)^\nu H_\nu^+(\omega a), \quad -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} \nu < \frac{1}{2},$$

який є перетвором Фур'є функції  $\theta(t - a) (t^2 - a^2)^{-\nu-1/2}$ . Звідси

$$G_d(r, t) = \frac{c}{2\pi^{\frac{d-1}{2}} \Gamma\left(\frac{3-d}{2}\right)} \frac{\theta(ct - r)}{(c^2 t^2 - r^2)^{\frac{d-1}{2}}}, \quad 1 \leq d < 3. \quad (12.29)$$

Отже,  $G_d$  виражається за рекурентним співвідношенням (12.28) через  $G_1$  для непарних розмірностей або через  $G_2$  для парних, де

$$G_1(r, t) = \frac{c}{2} \theta(ct - r), \quad G_2(r, t) = \frac{c}{2\pi} \frac{\theta(ct - r)}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2}}.$$

У першому випадку (12.26) конкретизується так:

$$(G_1 * \varphi)(t) = \int_{-\infty}^\infty G_1(r, \tau) \varphi(\tau) d\tau = \frac{c}{2} \int_{r/c}^\infty \varphi(t - \tau) d\tau,$$

$$(G_3 * \varphi)(t) = \frac{1}{2\pi} \left( -\frac{d}{rdr} \right) (G_1 * \varphi)(t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\varphi(t - r/c)}{r},$$

$$(G_{3+2n} * \varphi)(t) = \left( -\frac{d}{2\pi r dr} \right)^n (G_3 * \varphi)(t) = \frac{1}{2(2\pi)^{n+1}} \left( -\frac{d}{rdr} \right)^n \frac{\varphi(t - r/c)}{r}.$$

Отже, для  $d = 3 + 2n$

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2(2\pi)^{n+1}} \int_{\mathbb{R}^d} \left( -\frac{d}{\rho d\rho} \right)^n \frac{f(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, t - \rho/c)}{\rho} d\boldsymbol{\xi},$$

де після диференціювання слід підставити  $\rho = |\boldsymbol{\xi}|$ .

Для парних розмірностей

$$(G_2 * \varphi)(t) = \frac{c}{2\pi} \int_{r/c}^\infty \frac{\varphi(t - \tau) d\tau}{\sqrt{c^2 \tau^2 - r^2}},$$

$$(G_{2+2n} * \varphi)(t) = \frac{c}{(2\pi)^{n+1}} \left( -\frac{d}{rdr} \right)^n \int_{r/c}^\infty \frac{\varphi(t - \tau) d\tau}{\sqrt{c^2 \tau^2 - r^2}}.$$

У практичних застосуваннях, коли інтеграл в останньому виразі не обчислюється явно, одержана формула незручна, оскільки підінтегральний вираз недиференційовний по  $r$ . Тому перепишемо її в іншому вигляді, скориставшись тотожністю

$$I = \int_{r/c}^{\infty} \frac{\varphi d\tau}{\sqrt{c^2\tau^2 - r^2}} \equiv -\frac{1}{r^2} \int_{r/c}^{\infty} \sqrt{c^2\tau^2 - r^2} \left( \tau \frac{d\varphi}{d\tau} + 2\varphi \right) d\tau.$$

Продиференціювавши праву частину, дістанемо

$$\left( -\frac{d}{rdr} \right) I = \frac{1}{r^2} \int_{r/c}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{c^2\tau^2 - r^2}} \left( -\tau \frac{d\varphi}{d\tau} \right) d\tau,$$

звідки

$$(G_{2+2n} * \varphi)(t) = \frac{c}{(2\pi)^{n+1}} \frac{1}{r^{2n}} \int_{r/c}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{c^2\tau^2 - r^2}} \left( -\frac{\tau d}{d\tau} \right)^n \varphi(t - \tau) d\tau.$$

Отже, для  $d = 2 + 2n$

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{c}{(2\pi)^{n+1}} \int_0^\infty d\tau \int_{|\xi| \leq c\tau} \frac{\left( -\frac{\tau d}{d\tau} \right)^n f(\mathbf{x} - \xi, t - \tau)}{|\xi|^{2n} \sqrt{c^2\tau^2 - |\xi|^2}} d\xi. \triangleright$$

**Приклад 12.13.** Побудувати мультипольний розклад причинного розв'язку рівняння Даламбера в  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ .

*Мультипольний розклад* використовується в тих випадках, коли потрібно знайти розв'язок крайової задачі (12.1) у вільний від джерел поля підобласті  $D' \subset D$  (тобто  $f(\mathbf{x}) = 0$  при  $\mathbf{x} \in D'$ ). Ідея його така: якщо функцію Гріна можна подати у вигляді

$$G(\mathbf{x}, \xi) = \sum_{\lambda} u_{\lambda}(\mathbf{x}) v_{\lambda}(\xi),$$

де  $u_{\lambda}$  задовольняють однорідне рівняння  $\mathcal{L}u = 0$  в  $D'$ , то шуканий розв'язок виглядає так:

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda} u_{\lambda}(\mathbf{x}) Q_{\lambda}, \quad \mathbf{x} \in D', \quad (12.30)$$

де

$$Q_{\lambda} = \int_D v_{\lambda}(\xi) f(\xi) d\xi + \int_{\partial D} \frac{\partial v_{\lambda}(\xi)}{\partial n} \varphi(\xi) d\sigma(\xi). \quad (12.31)$$

Для інших межових умов формули аналогічні. Практична цінність формули (12.30) полягає в тому, що числові інтеграли (12.31) значно легше обчислити, ніж параметричний інтеграл (12.2). Для хвильового рівняння мультипольний розклад будують для перетворів Фур'є, при цьому у формулі (12.30) замість добутку буде згортка.

◁ Перейшовши у хвильовому рівнянні  $c^{-2}u_{tt} - \Delta u = f$  до перетворів Фур'є, одержимо рівняння Гельмгольца:  $\Delta \hat{u} + k^2 \hat{u} = -\hat{f}$ , де  $k = \omega/c$ . Необхідне розбиття функції Гріна оператора Гельмгольца дається формулою (12.25). Узявши до уваги, що  $\hat{G}(r, \omega) \equiv -G^{\text{Helm}}(r)$ , і згрупувавши належним чином множники у (12.25), матимемо мультипольний розклад виду (12.30):

$$\hat{u}(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{\lambda} \hat{h}^+(r, \omega) Y_{\lambda}(\mathbf{n}) \hat{Q}_{\lambda}(\omega),$$

де

$$\begin{aligned} \hat{h}^+(r, \omega) &= \frac{i}{4} \left( \frac{k}{2\pi} \right)^{d/2-1+l} r^{1-d/2} H_{d/2-1+l}^+(kr) \equiv r^l \hat{G}_{d+2l}(r, \omega), \\ \hat{Q}_{\lambda}(\omega) &= 2\pi \left( \frac{2\pi}{k} \right)^{d/2-1+l} \|Y_{\lambda}\|^{-2} \int_{\mathbb{R}^d} \rho^{1-d/2} J_{d/2-1+l}(k\rho) Y_{\lambda}(\boldsymbol{\nu}) \hat{f}(\boldsymbol{\xi}, \omega) d\boldsymbol{\xi}. \end{aligned}$$

Функція  $h^+ Y_{\lambda}$  – потенціал  $\lambda$ -ї компоненти мультиполя порядку  $l$  (незалежних компонент стільки, скільки гіперсферичних функцій порядку  $l$ ),  $Q_{\lambda}$  – її заряд.

У випадку, коли розміри області з джерелами поля набагато менші за довжину хвилі, функцію  $J_{d/2-1+l}(k\rho)$  розкладають у ряд<sup>7</sup>, що дозволяє в явній формі обернути перетвори  $\hat{Q}_{\lambda}$ :

$$\hat{Q}_{\lambda}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{-i\omega}{c} \right)^{2n} \hat{Q}_{\lambda n}(\omega), \quad \text{або ж} \quad Q_{\lambda}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{c^{2n}} \frac{d^{2n} Q_{\lambda n}(t)}{dt^{2n}},$$

де

$$Q_{\lambda n}(t) = \frac{\pi^{d/2+l}}{2^{2n-1} n! \Gamma(d/2 + l + n)} \|Y_{\lambda}\|^{-2} \int_{\mathbb{R}^d} \rho^{l+2n} Y_{\lambda}(\boldsymbol{\nu}) f(\boldsymbol{\xi}, t) d\boldsymbol{\xi}.$$

Вираз  $u$  спрощується в так званій хвильовій зоні:  $kr \gg 1$ . Тоді

$$\hat{h}^+(r, \omega) \sim \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{d-1}{2}+l}} r^{\frac{1-d}{2}} \left( \frac{-i\omega}{c} \right)^{\frac{d-3}{2}+l} e^{ikr},$$

а значить

$$\hat{u}(\mathbf{x}, \omega) = r^{\frac{1-d}{2}} e^{ikr} \sum_{\lambda n} \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{d-1}{2}+l}} \left( \frac{-i\omega}{c} \right)^{\frac{d-3}{2}+l+2n} Y_{\lambda}(\mathbf{n}) \hat{Q}_{\lambda n}(\omega),$$

<sup>7</sup>Утворений при цьому ряд для  $\hat{Q}_{\lambda}$  буде степеневим рядом по  $ka$ , де  $a$  – розміри системи.

що для непарних розмірностей дає

$$u(\mathbf{x}, t) = r^{\frac{1-d}{2}} \sum_{\lambda n} \frac{1}{2(2\pi c)^{\frac{d-1}{2}+l}} Y_{\lambda}(\mathbf{n}) \left( \frac{d}{c dt} \right)^{\frac{d-3}{2}+l+2n} Q_{\lambda n} \left( t - \frac{r}{c} \right). \triangleright$$

Методом зображень знайти функцію Гріна оператора Лапласа заданої області в  $\mathbb{R}^3$ . Де можливо, розглянути межові умови першого і другого роду. Для простих областей записати поверхневу функцію Гріна:

1. Півпростір:  $z > 0$ .
2. Двогранний кут:  $x > 0, y > 0$ .
3. Двогранний кут  $2\pi/n$ .
4. Октант:  $x > 0, y > 0, z > 0$ .
5. Двогранний кут  $2\pi/n$  з третьою площиною, перпендикулярною до перших двох.
6. Чотиригранний кут, що проходить з центра куба через ребра.
7. П'ятигранний кут з двогранними кутами  $2\pi/5$ .
8. Півкуля:  $r < b, z > 0$ .
9.  $r > a, x > 0, y > 0, z > 0$ .
10.  $r < b, x + y > 0, y + z > 0, z + x > 0$ .
11. Плоский шар:  $0 < z < 1$ .
12.  $0 < x < a, 0 < y < b$ .
13. Куб з довжиною ребра  $a$ .

Методом відокремлення змінних побудувати функцію Гріна оператора Лапласа заданої області з межовими умовами першого роду:

14. Півпростір в  $\mathbb{R}^3$ :  $z > 0$ .
15. Сферичний шар:  $a < r < b$ .
16. Півциліндр:  $z > 0, \rho < 1$ .
17. Гіперкуб в  $\mathbb{R}^d$  з довжиною ребра  $a$ .

Методом конформних відображень побудувати функцію Гріна оператора Лапласа заданої області на площині з межовими умовами першого роду. Для простих областей записати поверхневу функцію Гріна:

18. Півкруг:  $y > 0, x^2 + y^2 < 1$ .
19. Смуга:  $0 < y < \pi$ .
20. Півсмуга:  $0 < y < \pi, x > 0$ .
21. Прямокутник:  $|x| < a, 0 < y < b$ .

Методом конформних відображень розв'язати рівняння Лапласа:

$$22. \left\| \begin{array}{l} \Delta u = 0 \quad (0 < x < \pi, y < 0), \\ u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = 0, \\ u(x, 0) = 1. \end{array} \right. \quad 24. \left\| \begin{array}{l} \Delta u = 0 \quad (x^2/a^2 + y^2/b^2 < 1), \\ u(x, y) = 1 \text{ на верхній півдузі,} \\ u(x, y) = 0 \text{ на нижній півдузі.} \end{array} \right.$$

$$23. \left\| \begin{array}{l} \Delta u = 0, \\ u(x, 0) = 1 \text{ при } x < -a, \\ u(x, 0) = 0 \text{ при } x > a. \end{array} \right. \quad 25. \left\| \begin{array}{l} \Delta u = 0 \quad (|x| < a, 0 < y < b), \\ u(\pm a, y) = 0, \\ u(x, 0) = 1, \quad u(x, b) = 0. \end{array} \right.$$

26. Знайти функцію Гріна оператора Гельмгольца  $\Delta - \kappa^2$  в  $\mathbb{R}^d$  ( $\kappa > 0$ ).

27. Знайти функцію Гріна рівняння  $\Delta_3 - \kappa^2$  в півпросторі. Розглянути межові умови першого і другого роду. Записати поверхневу функцію Гріна.

28. Показати, що розв'язок рівняння  $\Delta u - \kappa^2 u = f(\mathbf{b}_1 \mathbf{x}, \dots, \mathbf{b}_n \mathbf{x})$  в  $\mathbb{R}^d$  ( $n < d$ ) виражається через функцію Гріна оператора Гельмгольца в  $\mathbb{R}^n$ .

29. Оцінити зверху розв'язок тривимірного рівняння Пуассона  $\Delta u = f$ , якщо  $f(r\mathbf{n}) \leq e^{-\alpha r}$ .

30. Оцінити зверху розв'язок крайової задачі для рівняння Пуассона

$$\left\| \begin{array}{l} \Delta u = f, \quad z > 0, \\ u(x, y, 0) = \psi(x, y), \end{array} \right.$$

якщо  $e^{-\alpha' r} \leq f(r\mathbf{n}) \leq e^{-\alpha r}$  і  $\psi(r, \phi) \leq e^{-\beta r}$ .

Розв'язати крайову задачу, перейшовши до параболічних координат за формулами  $x = (\xi^2 - \eta^2)/2$ ,  $y = \xi\eta$ ,  $\xi \in \mathbb{R}_+$ ,  $\eta \in \mathbb{R}$ :

$$31. \left\| \begin{array}{l} \Delta u = u, \\ u(x, \pm 0) = \psi_{\pm}(x), \quad x \leq 0. \end{array} \right. \quad 32. \left\| \begin{array}{l} \Delta u - \kappa^2 u = 0, \\ u(x, 0) = e^{\kappa x}, \quad x \leq 0. \end{array} \right.$$

Розв'язати крайову задачу, перейшовши до еліптичних координат за формулами  $x = a \operatorname{ch} \xi \cos \eta$ ,  $y = a \operatorname{sh} \xi \sin \eta$ ,  $\xi \in \mathbb{R}_+$ ,  $\eta \in ]0, 2\pi[$ :

$$33. \left\| \begin{array}{l} \Delta u - \kappa^2 u = 0, \\ u(x, 0) = \psi(x), \quad |x| \leq a. \end{array} \right.$$

34. Розв'язати спектральну задачу  $\Delta u + \lambda u = 0$  в  $d$ -вимірній гіперкулі з межовими умовами першого роду.

35. Розв'язати задачу розсіювання (дифракції) на сфері:

$$\left\| \begin{array}{l} \Delta_3 u + k^2 u = 0 \quad (r > a), \\ u(\mathbf{x}) = 0, \text{ при } r = a, \\ u(\mathbf{x}) \sim e^{ikz} + A(\mathbf{n})e^{ikr}/r, \text{ при } r \rightarrow \infty. \end{array} \right.$$

**36.** Розв'язати задачу розсіювання (дифракції) на півплощині:

$$\left\| \begin{array}{l} \Delta_2 u + k^2 u = 0, \\ u(\mathbf{x}) = 0, \text{ при } y = 0, x > 0, \\ u(\mathbf{x}) \sim e^{iky} + A(\mathbf{n})e^{ikr}/\sqrt{r}, \text{ при } r \rightarrow \infty. \end{array} \right.$$

**37.** Одержати мультипольний розклад розв'язку тривимірного рівняння Пуассона на нескінченності.

**38.** Одержати мультипольний розклад розв'язку тривимірного рівняння Пуассона в околі нуля.

Розв'язати рівняння Лапласа:

$$39. \left\| \begin{array}{l} \Delta u = 0 \quad (y > 0, r < 1), \\ u(x, 0) = 0, \\ u(x, y) = y^3 - 3x^2 y, \\ \text{при } x^2 + y^2 = 1. \end{array} \right.$$

$$41. \left\| \begin{array}{l} \Delta u = 0 \quad (y > 0, x^2 + y^2 < 1), \\ u(x, 0) = 1, \\ u(x, y) = 0 \text{ при } x^2 + y^2 = 1. \end{array} \right.$$

$$40. \left\| \begin{array}{l} \Delta u = 0 \quad (z > 0, r < 1), \\ u(x, y, 0) = 0, \\ u(x, y, z) = (x^2 - y^2 + xy)z, \\ \text{при } x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{array} \right.$$

$$42. \left\| \begin{array}{l} \Delta u = 0 \quad (y, z > 0), \\ u(x, y, 0) = 0, \quad u(x, 0, z) = 1. \end{array} \right.$$

# Відповіді до задач

Позначення:

- $\Phi_m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  – дійсний (5.4) або комплексний ( $e^{im\phi}$ ) тригонометричний базис.

- 1.4.  $u_{\xi\eta} - (u_\xi - u_\eta)/16 = 0$ ,  $\xi = x - y$ ,  $\eta = 3x + y$ .
- 1.5.  $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_\xi = 0$ ,  $\xi = x$ ,  $\eta = 3x + y$ .
- 1.6.  $u_{\eta\eta} + u_\xi = 0$ ,  $\xi = x - 2y$ ,  $\eta = x$ .
- 1.7.  $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \frac{2x-y}{2(x-y)^2}(u_\xi - u_\eta) = 0$ ,  $\xi = y - 2x + yx^{-2}$ ,  $\eta = y - 2x - yx^{-2}$ .
- 1.8.  $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} - \frac{x+y}{(x-y)^2}(u_\xi - u_\eta) = 0$ ,  $\xi = x + y + x^2/2 + y^2/2$ ,  $\eta = x + y - x^2/2 - y^2/2$ .
- 1.9.  $u_{\eta\eta} + (e^y + e^{2y-x})u_\xi = 0$ ,  $\xi = e^x + e^y$ ,  $\eta = y$ .
- 1.10.  $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 2u_\eta = 0$ ,  $\xi = \frac{1}{2} \ln(y+x) - \frac{1}{2} \ln(y-x)$ ,  $\eta = -\frac{1}{2} \ln(y+x) - \frac{1}{2} \ln(y-x)$ .
- 1.11.  $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} - \frac{2xy(x+2y)}{(x^2-y^2)^2}(u_\xi - u_\eta) = 0$ ,  $\xi = x/2 + y - x^3/6 + y^3/3$ ,  $\eta = x/2 + y + x^3/6 - y^3/3$ .
- 1.12.  $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} - \frac{3+x^4}{8xy}u_\xi + \frac{3-x^4}{8xy}u_\eta = 0$ ,  $\xi = xy + yx^{-3}$ ,  $\eta = xy - yx^{-3}$ .
- 1.13.  $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{5(x^2-y^2)}{4x^2y^2}u_\xi + \frac{5}{2x^2}u_\eta = 0$ ,  $\xi = y^2/2 - x^2/10$ ,  $\eta = x^2/5$ .
- 1.14.  $u_{\eta\eta} + \frac{4x^2-8xy-4y^2}{(x-y)^2}u_\xi = 0$ ,  $\xi = -x^2 + 2xy + y^2$ ,  $\eta = y$ .
- 1.15.  $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \frac{u_\eta - u_\xi \cos x}{1 + \sin 2x} = 0$ ,  $\xi = y - \ln \operatorname{tg}(x/2)$ ,  $\eta = x + \ln \sin x$ .
- 1.16.  $u_{\eta\eta} + \frac{u_\xi}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ ,  $\xi = x + \sqrt{x^2+y^2}$ ,  $\eta = y$ .

- 2.1.  $\nu_n = \pi n/l$ ,  $X_n(x) = \sin \nu_n x$ ,  $\|X_n\|^2 = l/2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- 2.2.  $\nu_n = \pi(n+1/2)/l$ ,  $X_n(x) = \sin \nu_n x$ ,  $\|X_n\|^2 = l/2$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ .
- 2.3.  $\nu_n = \pi(n+1/2)/l$ ,  $X_n(x) = \cos \nu_n x$ ,  $\|X_n\|^2 = l/2$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ .
- 2.4.  $\nu_n = \pi n/l$ ,  $X_n(x) = \cos \nu_n x$ ,  $\|X_0\|^2 = l$ ,  $\|X_n\|^2 = l/2$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ .
- 2.5.  $\nu_n = \pi n/l$ ,  $X_n(x) = \cos \nu_n(x-a)$ ,  $\|X_0\|^2 = l$ ,  $\|X_n\|^2 = l/2$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$  ( $l = b-a$ ).
- 2.6.  $\nu_n = \pi n/2a$ ,  $X_n(x) = \sin \nu_n(x+a)$ ,  $\|X_n\|^2 = a$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- 2.7.  $\nu_n l = \pi n - \operatorname{arctg}(\nu_n/h)$ ,  $X_n(x) = \sin \nu_n x$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- 2.8.  $\nu_n l = \pi(n+1/2) - \operatorname{arctg}(\nu_n/h)$ ,  $X_n(x) = \cos \nu_n(x-l)$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ .
- 2.9. Тут  $p = \rho = e^x$ ,  $q = 0$ . Маємо  $\nu_n = n^2 + 1/4$ ,  $X_n(x) = e^{-x/2} \sin nx$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- 2.10. Тут  $p = \rho = e^{-2x}$ ,  $q = 0$ . Маємо  $\nu_n = \varkappa_n^2 + 1$ , де  $\varkappa_n = \pi(n+1/2) - \operatorname{arctg}(\varkappa_n/2)$ ,  $X_n(x) = e^x \cos \varkappa_n x$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ .
- 2.11.  $(p = x, q = 0, \rho = 1/x)$   $\nu_n = \pi(n+1/2)$ ,  $X_n(x) = \sin(\nu_n \ln x)$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ .
- 2.12.  $(p = x, q = 0, \rho = 1/x)$   $\nu_n = \pi n/2 \ln a$ ,  $X_n(x) = \sin(\nu_n \ln ax)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- 2.13.  $\lambda_n = \nu_n^2$ ,  $X_n(x) = \sin \nu_n x$ , де  $\nu_n - n$ -й у порядку зростання додатний корінь рівняння  $\operatorname{tg} \nu = \nu/h$ ; при  $hl > 1$  є ще власне значення  $\lambda_0 = -\nu_0^2$  і власна функція  $X_0(x) = \operatorname{sh} \nu_0 x$ , де  $\nu_0$  – додатний корінь рівняння  $\operatorname{th} \nu = \nu/h$ . Це не задача ШЛ, бо в умові коефіцієнти при  $X(l)$  і  $X'(l)$  мають протилежні знаки (межові умови не є додатно визначеними).

- 2.14.  $\lambda_n = n(n + \alpha - 1)$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ ,  $X_n(x) = P_n^{a,b}(x)$  (поліноми Якобі [1, 3, 14, 18]), де  $a = (\alpha + \beta)/2 - 1$ ,  $b = (\alpha - \beta)/2 - 1$ .
- 2.15.  $\lambda = \nu(\nu + 1)$ ,  $X_\nu = P_\nu^{-\mu}(x)$  (приєднані функції Лежандра [1, 2, 14, 18]),  $\nu$  визначається з рівняння  $P_\nu^{-\mu}(a) = 0$ , множина розв'язків якого зліченна і така, що  $\nu \geq \mu \geq 0$ . Казівка: фундаментальною системою розв'язків є пара функцій  $(P_\nu^{-\mu}, Q_\nu^{-\mu})$ , перша з яких обмежена в околі одиниці (в цьому можна переконатися з представлення  $P_\nu^{-\mu}$  через гіпергеометричну функцію при  $\mu \geq 0$ ). Обчисливши вронскіан, бачимо, що друга функція необмежена.
- 2.16.  $\lambda = (\mu + k)(\mu + k + 1)$ ,  $X_k = P_{k+\mu}^{-\mu}(x) \propto (1 - x^2)^{-\mu/2} \frac{d^k}{dx^k} (1 - x^2)^{\mu+k}$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ ,
- 2.17.  $\lambda = n(n + 2a + 1)$ ,  $n \geq m$ ,  $X_n(x) = P_n^{m,a}$  – гіперсферичні квазіполіноми:  $P_n^{m,a}(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n^{0,a}(x)$ , де  $P_n^{0,a}(x) = \frac{(2a+1)_n}{(a+1)_n} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^{n+a}$  – поліноми Гегенбауера [1, 3, 14, 18] (пор. з прикладом 2.5).
- 2.18.  $\lambda_n = n$ ,  $X_n(x) = L_n^a(x)$  – поліноми Лагера [1, 3, 14, 18],  $n \in \mathbb{Z}_+$ .
- 2.19.  $\lambda_n = n$ ,  $X_n(x) = H_n(x)$  – поліноми Ерміта [1, 3, 14, 18],  $n \in \mathbb{Z}_+$ .
- 2.20.  $X_n(x) = H_n(x)e^{-x^2/2}$ ,  $\lambda_n = 2n + 1$ ,  $\|X_n\|^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ .
- 2.21. Залишаємо тільки парні функції з 2.20 (тобто парні  $n$ ).
- 2.22. Див. [5, с. 69].

- 3.1.  $u(x, t) = (e^{-t} - 1 + t) \sin x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8k}{\pi(4k^2 - 1)} e^{-4k^2 t} \sin 2kx$ .
- 3.2.  $u(x, t) = \frac{l^2}{\pi^2} \left( e^{-t\pi^2/l^2} - 1 \right) \sin \frac{\pi x}{2l} - \frac{l^2}{9\pi^2} \left( e^{-9t\pi^2/l^2} - 1 \right) \sin \frac{3\pi x}{2l} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} e^{-(2n+1)^2 t \pi^2/l^2} \sin \frac{\pi(n+1/2)x}{l}$ .
- 3.3.  $u(x, t) = \frac{1}{3} \left( 1 - e^{-9t/4} \right) \cos \frac{x}{2} + \frac{1}{81} \left( 1 - e^{-81t/4} \right) \cos \frac{3x}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(2\pi n(-1)^n + \pi(-1)^{n-2})}{\pi(2n+1)^2} e^{-9(2n+1)^2 t/4} \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) x$ .
- 3.4.  $u(x, t) = \frac{1}{2}(1+t) + \frac{\sin 4}{8}(1-t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n \sin 4}{(\pi^2 n^2 - 16)} \left( \frac{2}{\pi n a} \sin \frac{\pi n a t}{2} - \cos \frac{\pi n a t}{2} \right) \cos \frac{\pi n x}{2}$ .
- 3.5.  $u(x, t) = -\cos \pi t \sin \frac{\pi x}{2} + \cos 5\pi t \sin \frac{5\pi x}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^3(2n+1)^3} \left( t - \frac{\sin \pi(2n+1)t}{\pi(2n+1)} \right) \sin \pi \left( n + \frac{1}{2} \right) x$ .
- 3.6.  $u(x, t) = \left( 1 + 2e^{-\pi^2 t} \right) \sin \pi x + \frac{1}{4} \left( 1 - e^{-4\pi^2 t} \right) \sin 2\pi x - e^{-9\pi^2 t} \sin 3\pi x$ .
- 3.7.  $u(x, t) = \operatorname{sh} t \sin x + e^{-9t} \sin 3x$ .
- 3.8.  $u(x, t) = (t + e^{-t} - 1) \cos x + \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \frac{\cos nx}{4n^2 - 1}$ .
- 3.9.  $u(x, t) = (\cos 3t - t) \sin \frac{3x}{2} + \left( \frac{1}{5} \sin 5t + \cos 5t \right) \sin \frac{5x}{2}$ .
- 3.10.  $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8l(-1)^n}{\pi^2(2n+1)^2} \cos \frac{\pi(2n+1)at}{2l} \sin \frac{\pi(2n+1)x}{2l}$ .
- 3.11.  $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} \exp \left[ -\frac{\pi^2(2n+1)^2}{4(b-a)^2} t \right] \sin \left[ \frac{\pi(2n+1)(x-a)}{2(b-a)} \right]$ .
- 3.12.  $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2l(-1)^k}{\pi k} e^{-t\pi^2/l^2} \sin \frac{\pi k x}{l}$ .
- 3.13.  $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{48(-1)^n}{\pi^3(2n+1)^3} \left( 1 - e^{-\pi^2(2n+1)^2 t/12} \right) \cos \frac{\pi(2n+1)(x+2)}{6}$ .
- 3.14.  $u(x, t) = \frac{1}{4\pi^2} \left( 1 - e^{-4\pi^2 t} \right) \cos \pi x + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)(2k+3)} e^{-\pi^2(2k+1)^2 t} \sin \pi \left( k + \frac{1}{2} \right) x$ .
- 3.15.  $u(x, t) = \cos \frac{\pi t}{2} \cos \frac{\pi x}{2}$ .



- 3.16.  $u(x, t) = \sum_n \frac{(1, X_n)}{\|X_n\|^2} X_n(x) e^{-\nu_n^2 t}$ , де  $(\nu_n, X_n)$  – власні елементи задачі 2.7.
- 3.17.  $u(x, t) = \sum_n \frac{(x, X_n)}{\|X_n\|^2} X_n(x) (1 - \cos \nu_n t) \nu_n^{-2}$ , де  $(\nu_n, X_n)$  – власні елем. 2.8.
- 3.18.  $u(x, t) = \left(\frac{3}{4} + t\right) e^{-t^2} \cos x + \frac{1}{4} e^{-9t^2} \cos 3x$ .
- 3.19.  $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16(-1)^n}{\pi(2n+1)^3} e^{-t} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x$ .
- 3.20.  $u(x, t) = \left(1 - \frac{1}{3} e^{-t} - \frac{2}{3} e^{t/2} \cos \frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \sin x$ .
- 3.21.  $u(x, t) = \frac{2\omega(\cos t - \cos \omega t) + t \sin \omega t (1 - \omega^2)}{(1 - \omega^2)^2} \sin x$ , зокрема при  $\omega = 1$   
 $u(x, t) = \frac{1}{4} t (\sin t - t \cos t) \sin x$ .
- 3.22.  $u(x, t) = 1 + \frac{t^2}{2} - \frac{t^2(2t+3)}{6(t+1)} \cos \frac{\pi x}{t} + \frac{1}{(t+1)^4} \cos \frac{2\pi x}{t}$  [27, с. 35\*].
- 3.23.  $\frac{3}{4}(1 - e^{-t}) \sin x - \frac{1}{36}(1 - e^{-9t}) \sin 3x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(-1)^{n+1} \sin \pi \mu}{\pi(n^2 - \mu^2)} e^{-n^2 t} \sin nx$ .
- 3.24.  $\frac{e^{\pi} - 1}{\pi} + \frac{3}{8}t + \frac{1}{8}(1 - e^{-4t}) \cos 2x + \frac{1}{128}(1 - e^{-16t}) \cos 4x$   
 $+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(e^{\pi}(-1)^n - 1)}{\pi(n^2 + 1)} e^{-n^2 t} \cos nx$ .
- 3.25. [27, с. 41].
- 3.26.  $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(4k-1)}{2k!} \frac{\Gamma(k-1/2)}{\Gamma(1/2)} P_{2k-1}(x) e^{-2k(2k-1)t}$ .
- 3.27.  $u(x, t) = 1/3 + \sin t + (x^2 - 1/3) \cos \sqrt{6}t$ .
- 3.28.  $u(x, t) = \frac{1}{|\cos \frac{\alpha}{2}|} \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{tg}^n \frac{\alpha}{2} e^{-n(n+1)t} P_n(x)$ .
- 3.29.  $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{4k-1} \left(\frac{\Gamma(k-1/2)}{k!}\right)^2 e^{-2k(2k-1)t} P_{2k-1}(x)$ .
- 3.30.  $u(x, t) = t/2 + \frac{2x^2-1}{8} (1 - e^{-4t}) + (3/4)xe^{-t} + x(x^2 - 3/4)e^{-9t}$ .
- 3.31.  $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2(1+\alpha)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n} n!} \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^n e^{-(2n+1)t} H_n(x) e^{-x^2/2};$   
 $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} H_{2n}(x) dx = \frac{\sqrt{\pi}(2n)!(1-\alpha)^n}{2n! \alpha^{n+1/2}}.$
- 3.32.  $u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - \cos(\sqrt{4k+1}t)}{(4k+1)} \frac{(-1)^k}{2^{2k-3/2}(2k)!} e^{-(\alpha^2+x^2)/2} H_{2k}(\alpha) H_{2k}(x)$   
 $+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{4k+1}t)}{\sqrt{4k+3}} \frac{(-1)^k}{2^{2k-1/2}(2k+1)!} e^{-(\alpha^2+x^2)/2} H_{2k+1}(\alpha) H_{2k+1}(x);$   
 $\int_0^{\infty} e^{-x^2/2} H_{2k}(x) \cos \alpha x dx = (-1)^k \sqrt{2\pi} e^{-\alpha^2/2} H_{2k}(\alpha),$   
 $\int_0^{\infty} e^{-x^2/2} H_{2k+1}(x) \sin \alpha x dx = (-1)^k \sqrt{2\pi} e^{-\alpha^2/2} H_{2k+1}(\alpha).$
- 3.33. Див. [27, с. 37].
- 3.34. Див. [27, с. 38].
- 3.35. Див. [27, с. 44].
- 3.36.  $w(x, t) = t + x, v(x, t) = (1 - e^{-t}) \sin x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} e^{-(2n+1)^2 t} \sin(2n+1)x$ .
- 3.37.  $w(x, t) = t(1 - x), v(x, t) = \cos 2\pi t \sin x + \cos 6\pi t \sin 3\pi x$   
 $- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\pi^2(2k+1)^2} \sin 2\pi(2k+1)t \sin \pi(2k+1)x$ .
- 3.38.  $w(x, t) = x\pi(t-1) + x^2, v(x, t) = 2t + (1-t)\frac{\pi}{2}$   
 $+ \sum_{n=1}^{\infty} (1 - (-1)^n) \frac{2}{n^4} \left(1 - (n^2 + 1)e^{-n^2 t}\right) \cos nx$ .
- 3.39.  $w(x, t) = x \sin t, v(x, t) = -(\sin t + t \cos t) \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n(n^2-1)} (n \sin nt - \sin t) \sin nx$ .

- 3.40.  $u(x, t) = t + x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8l(-1)^n}{\pi^2(2n+1)^2} \cos \frac{\pi(2n+1)t}{2l} \sin \frac{\pi(2n+1)x}{2l}.$
- 3.41.  $u(x, t) = t \left( x - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{2} (1 - e^{-t}) \cos x.$
- 3.42.  $u(x, t) = \frac{x-l}{4} t^2 + \frac{2l}{3\pi} \sin \frac{3\pi t}{2l} \cos \frac{3\pi x}{2l} + \frac{2l^3}{\pi^2} \left( 1 - \cos \frac{\pi t}{2l} \right) \cos \frac{\pi x}{2l}.$
- 3.43.  $u(x, t) = x \sin \omega t + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 16\omega}{\pi(2n+1)^2((2n+1)^2 - \omega^2)} \left[ 2\omega \sin \omega t - (2n+1) \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) t \right] \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) x.$
- 3.44.  $u(x, t) = x \cos t + \sin t + \sum_n \frac{\sin t - \nu_n a \sin \nu_n a t}{\nu_n^2 a^2 - 1} X_n(x),$  де  $(\nu_n^2, X_n)$  – власні елементи задачі 2.8.
- 3.45.  $w(x, t) = tx^3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{32(-1)^n}{\pi^4(2n+1)^4} \left[ \pi \left( n + \frac{1}{2} \right) t - \sin \pi \left( n + \frac{1}{2} \right) t \right] \cos \pi \left( n + \frac{1}{2} \right) x.$
- 3.46.  $w(x, t) = -\sin x, v(x, t) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(4k^2-1)\pi} e^{-4k^2 t} \cos 2kx.$
- 3.47.  $w(x, t) = t \sin x, v(x, t) = \left( \frac{1}{4} t + \frac{3}{16} (1 - e^{-4t}) \right) \sin 2x.$
- 3.48.  $u(x, t) = e^{-2t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)(2k+1)(4k-1)} \frac{\Gamma(k-1/2)}{k! \Gamma(1/2)} \left( e^{-2t} - e^{-2k(2k-1)t} \right) P_{2k-1}(x).$
- 3.49.  $u(x, t) = e^{-x^2/2} \left[ x \cos t - \frac{1}{\sqrt{\pi}} t \sin t + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (\cos t - \cos \sqrt{4n+1}t)}{2n(2n-1)2^{2n} n!} H_{2n}(x) \right];$   
 $\int_0^{\infty} x e^{-x^2} H_{2n}(x) dx = (-1)^n 2^{2n-1} \Gamma \left( n - \frac{1}{2} \right) / \Gamma \left( -\frac{1}{2} \right).$

- 4.1.  $u(x, y) = \left( \frac{4 \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} a} - x \right) \cos y + \frac{\operatorname{sh} 3x}{3 \operatorname{ch} 3a} \cos 3y.$
- 4.2.  $u(x, y) = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi b}{2a}} \operatorname{ch} \frac{\pi(b-2y)}{2a} \cos \frac{\pi x}{a} + \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi b}{a}} \operatorname{sh} \frac{\pi(b-2y)}{a} \cos \frac{2\pi x}{a} + \left( \frac{y}{b} - 1 \right) \int_0^y s f(s) ds + y \int_y^b \left( \frac{s}{b} - 1 \right) f(s) ds.$
- 4.3.  $u(x, y) = \frac{\operatorname{sh} 3x}{\operatorname{sh} 3a} \sin 3y - \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} a} \sin y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^3} \left( \frac{\operatorname{sh} nx}{\operatorname{sh} na} - \frac{x}{a} \right) \sin ny.$
- 4.4.  $u(x, y) = 3 \frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{sh} b} \sin x - \frac{\operatorname{sh} 3y}{\operatorname{sh} 3b} \sin 3x + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \frac{\operatorname{sh}(2n+1)(b-y)}{\operatorname{sh}(2n+1)b} \sin(2n+1)x.$
- 4.5.  $u(x, y) = \left( \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} b} \sin b - \sin x \right) \sin y.$
- 4.6.  $u(x, y) = (xe^x - (\pi+1) \operatorname{sh} x) \cos y.$
- 4.7.  $u(x, y) = \frac{3}{2} (x + e^{-x} - e^{x-2a}) \cos y + a \frac{2e^{3x} + e^{-3x}}{2e^{3a} + e^{-3a}} \cos 3y.$
- 4.8.  $u(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n} \left( ha \operatorname{ch} \frac{\pi nb}{a} + \pi n \operatorname{sh} \frac{\pi nb}{a} \right)^{-1} \operatorname{ch} \frac{\pi ny}{a} \sin \frac{\pi nx}{a}.$
- 4.9.  $u(x, y) = x - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n \operatorname{sh} \lambda_n b} \sin \lambda_n x \operatorname{sh} \lambda_n y, \lambda_n = \frac{\pi n}{a}, n \in \mathbb{N}.$
- 4.10.  $u(x, y) = y^2 + y(x-2) + \frac{32}{\pi^2} \left( \operatorname{ch}^{-1} \frac{\pi}{4} \operatorname{ch} \frac{\pi(1-y)}{4} - 1 \right) \cos \frac{\pi x}{4}.$
- 4.11.  $u(x, y) = \cos y + \left( \frac{\operatorname{ch} y - \operatorname{sh}(\pi-y)}{\operatorname{ch} \pi} - 1 \right) \sin y.$
- 4.12.  $u(x, y) = \frac{y}{6} (3 - \pi^2 + y^2) + \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{sh} 2\pi y}{\operatorname{sh} 2\pi^2} \cos 2\pi x + \left( \frac{2}{\operatorname{sh} 1} \operatorname{ch} x - x \right) \sin y + \frac{2}{\operatorname{ch}(1/2)} \operatorname{sh} \left( x - \frac{1}{2} \right) \sin 3y.$
- 4.13.  $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - (-1)^n) \frac{2}{\pi^3 n^3} \left[ \left( \frac{\pi^2 n^2 + a^2 b}{\operatorname{sh} \frac{\pi nb}{a}} \operatorname{sh} \frac{\pi ny}{a} - a^2 y \right) \sin \frac{\pi nx}{a} + \left( \frac{\pi^2 n^2 + b^2 a}{\operatorname{sh} \frac{\pi na}{b}} \operatorname{sh} \frac{\pi nx}{b} - b^2 x \right) \sin \frac{\pi ny}{b} \right].$
- 4.14.  $u(x, y) = \operatorname{sh}^{-1} \frac{\pi^2}{2} \operatorname{sh} \frac{\pi(\pi-y)}{2} \sin \frac{\pi x}{2} + \operatorname{sh} \pi^2 \operatorname{sh} \pi y \sin \pi x + \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sh}(x-1)}{\operatorname{sh} 1} \sin y + \frac{1}{2} (e^2 \frac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{sh} 2} + (1-x)e^{2x}) \sin 2y.$

- 4.15.  $u(x, y) = \operatorname{sh}^{-1} \frac{\pi b}{2a} \operatorname{sh} \frac{\pi y}{2a} \cos \frac{\pi x}{2a} - \operatorname{sh}^{-1} \frac{3\pi b}{2a} \operatorname{sh} \frac{3\pi y}{2a} \cos \frac{3\pi x}{2a} - \frac{b}{2\pi} \operatorname{ch}^{-1} \frac{2\pi a}{b} \operatorname{sh} \frac{2\pi(a-x)}{b} \sin \frac{2\pi y}{b}$ .
- 4.16.  $u(x, y) = xy + \sum_{n=0}^{\infty} 2 \frac{1-(-1)^n \lambda_n}{\lambda_n^2} \frac{1+h}{\operatorname{ch} \lambda_n + h \operatorname{sh} \lambda_n} \operatorname{sh} \lambda_n x \cos \lambda_n y$ , де  $\lambda_n = \pi \left(n + \frac{1}{2}\right)$ .
- 4.17.  $u(x, y) = xy(1-y) - 2 \frac{(e^y-1)(e^{1-y}-1)}{e+1} \sin x$ .
- 4.18.  $u(x, y) = \operatorname{sh}^{-1} \frac{\pi b}{2a} \operatorname{sh} \frac{\pi(b-y)}{2a} \sin \frac{\pi x}{2a} + \operatorname{sh}^{-1} \frac{3\pi b}{2a} \operatorname{sh} \frac{3\pi y}{2a} \sin \frac{3\pi x}{2a} - \frac{b^2}{\pi^2} \left(1 - \operatorname{ch}^{-1} \frac{\pi a}{b} \operatorname{ch} \frac{\pi(a-y)}{b}\right) \sin \frac{\pi x}{b}$ .
- 4.19.  $u(x, y) = -2a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{\pi^2 n^2} \exp\left(-\frac{\pi n y}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)$ .
- 4.20.  $u(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} (3e^{-2y} - 1) \cos 2x$ .
- 4.21.  $u(x, y) = -\frac{a}{\pi+2ha} \exp\left(-\frac{\pi y}{2a}\right) \cos \frac{\pi x}{2a} - \frac{a}{3\pi+2ha} \exp\left(-\frac{3\pi y}{2a}\right) \cos \frac{3\pi x}{2a}$ .
- 4.22. Щоб уникнути узагальнених функцій, зводимо до задачі в півсмузі.  
 $u(x, y) = \frac{x}{\pi} e^{-|y|} + \frac{|y|-1}{\pi} e^{-|y|} \sin x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2-1)} \left(e^{-n|y|} - \frac{1}{n} e^{-|y|}\right) \sin nx$ .
- 4.23.  $u(x, y) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} e^{-(2k+1)y} \sin(2k+1)x$ .
- 4.24.  $u(x, y) = -\frac{1}{2} \cos y [e^x \ln(1+e^{-2x}) + e^{-x} \ln(1+e^{2x})]$ .
- 4.25. Нехай  $\varphi_n$  – коефіцієнти Фур'є розкладу  $\varphi$  по базису  $X_n(x) = \sin nx$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Якщо  $\varphi_1 = 0$ , то маємо однопараметричну сім'ю розв'язків  $u(x, y) = C \sin x \sin y + \sum_{n=2}^{\infty} \varphi_n \sin nx \frac{\operatorname{sh} \sqrt{n^2-2} y}{\operatorname{sh} \sqrt{n^2-2} \pi}$ , інакше розв'язків немає.
- 4.26.  $u(x, y) = -\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) \int_0^{\infty} e^{-\eta^2/2- \eta} \operatorname{ch}(y\eta) d\eta$ .
- 4.27.  $u(x, y, z) = Y_{11}(y) \sin x \cos z + \sum_{n=1}^{\infty} Y_{n0}(y) \sin nx + \sum_{n=1, m=0}^{\infty} Z_{nm}(z) \sin nx \sin(m+1/2)y$ , де  $Y_{11}(y) = \frac{\operatorname{sh} \sqrt{2} y}{\sqrt{2} \operatorname{ch}(\sqrt{2}\pi)}$ ,  
 $Y_{n0}(y) = \frac{(1)_n}{n^2} \left(\frac{\operatorname{sh} ny}{n \operatorname{ch} n\pi} - y\right)$ ,  $Z_{nm}(z) = \frac{(1)_n (1)_m \operatorname{ch} \sqrt{n^2+(m+1/2)^2} z}{\sqrt{n^2+(m+1/2)^2} \operatorname{sh} \sqrt{n^2+(m+1/2)^2} \pi}$ ,  
 $(1)_n = 2 \frac{1+(-1)^n}{\pi n}$ ,  $(1)_m = \frac{4}{\pi(2m+1)}$ .
- 4.28.  $u_{nm}(x, y) = \sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b}$ ,  $\lambda_{nm} = \frac{\pi^2 n^2}{a^2} + \frac{\pi^2 m^2}{b^2}$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ .
- 4.29.  $u_{nm} = \sin \frac{\pi(2n+1)x}{2a} \cos \frac{\pi(2m+1)y}{2b}$ ,  $\lambda_{nm} = \frac{\pi^2(2n+1)^2}{4a^2} + \frac{\pi^2(2m+1)^2}{4b^2}$ ,  $n, m \in \mathbb{Z}_+$ .
- 4.30.  $u(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^d \sin \frac{\pi n_i x_i}{a_i}$ ,  $\lambda = \sum_{i=1}^d \frac{\pi^2 n_i^2}{a_i^2}$ ,  $n_i \in \mathbb{N}$ , тут  $a_i$  – довжини сторін.
- 4.31.  $u(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^d \Phi_{m_i} \left(\frac{\pi^2 x_i}{a_i}\right)$ ,  $\lambda = \sum_{i=1}^d \frac{4\pi^2 m_i^2}{a_i^2}$ ,  $m_i \in \mathbb{Z}$ ,  $a_i$  – довжини сторін.
- 4.32.  $u_{nm}(x, y) = (-1)^m \sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{a}$ ,  $(-1)^n \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{a}$ ,  $\lambda_{nm} = \frac{\pi^2(n^2+m^2)}{a^2}$ ,  $n > m \geq 1$ , тут  $a$  – довжина катетів.
- 4.33. Зафіксуємо трикутник нерівностями  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $x + y < a$ . Нехай на гіпотенузі  $u(x, y) = \varphi(x-y)$ , де  $\varphi$  – задана функція. Робимо заміну  $u(x, y) = v(x, y) + \varphi(x-y)$ . Крайову задачу для  $v$  продовжуємо непарним чином через гіпотенузу до такої задачі у квадраті:  $\Delta v = 2 \operatorname{sgn}(x+y-a) \varphi''(x-y)$ ,  $v(0, y) = -\varphi(-y)$ ,  $v(a, y) = \varphi(a-y)$ ,  $v(x, 0) = -\varphi(x)$ ,  $v(x, a) = \varphi(x-a)$ , яка стандартно розв'язується методом відокремлення змінних.
- 4.34. В позначеннях задачі 4.33 межава умова на гіпотенузі така:  $u_x(x, y) + u_y(x, y) = \varphi(x-y)$ . Заміна  $u(x, y) = v(x, y) + (x+y-a)\varphi(x-y)$ . Продовжуємо

парним чином до такої задачі в квадраті:  $\Delta v = 2|x+y-a|\varphi''(x-y)$ ,  $v(0, y) = (a-y)\varphi(-y)$ ,  $v(a, y) = y\varphi(a-y)$ ,  $v(x, 0) = (a-x)\varphi(x)$ ,  $v(x, a) = x\varphi(x-a)$ .

4.35.  $u_{nm}(x, y) = \sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{a}$ ,  $\lambda_{nm} = \frac{\pi^2(n^2+m^2)}{a^2}$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ .

4.36.  $f$  – непарна по обох аргументах і симетрична відносно їх перестановки функція. Достатньо знайти розв'язок у квадраті  $[0, a]^2$  з однорідними межовими умовами, а потім продовжити його непарним чином.

4.37. Якщо межові умови узгоджені, тобто  $\chi_i(0) = \chi_i(1) = 0$ , то  $w(x, y) = (1-x)\chi_1(y) + x\chi_2(y)$ , інакше  $w(x, y) = [(1-x)\chi_1(y) + x\chi_2(y)] \frac{y(1-y)}{y(1-y)+x(1-x)}$ .

5.1.  $u(\rho, \phi) = \frac{\rho}{2} + \frac{\rho(2\rho+1)}{6} \cos 2\phi$ .

5.2.  $u(\rho, \phi) = \frac{7}{72} + \frac{5}{18}\rho^3 - \frac{1}{2}\rho^3 \cos 2\phi + \frac{1}{8}\rho^4 \cos 4\phi$ .

5.3. Розв'язок існує, якщо  $g_0 = 0$ , де  $g = \sum_{m \in \mathbb{Z}} g_m \Phi_m$ . Тоді  $u(\rho, \phi) = C + \sum_{m \neq 0} \frac{g_m \rho^{|m|}}{|m|!|m|-1} \Phi_m(\phi)$ , де  $C$  – довільна стала.

5.4.  $u(\rho, \phi) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n(n^2-9)} \left( \frac{3+h}{n+h} \rho^n - \rho^3 \right) \sin n\phi$ .

5.5.  $u(\rho, \phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \rho^m \cos m\phi \equiv \frac{1-\rho \cos \phi}{1-2\rho \cos \phi + \rho^2}$ .

5.6.  $u(\rho, \phi) = C + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho^m (m \ln \rho - 1)}{2m^2} \sin m\phi$ .

5.7.  $u(\rho, \phi) = \frac{1}{2} \ln(1 + 2\rho \cos \phi + \rho^2) - \ln 2$ .

5.8.  $u(\rho, \phi) = \frac{a^2 b^2 \rho^{-2} + \rho^2}{a^2 + b^2} \cos 2\phi + \frac{b^8 \rho^{-4} - \rho^4}{b^8 a^{-4} - a^4} \cos 4\phi$ .

5.9.  $u(\rho, \phi) = \left[ \frac{1}{3} (\rho - \rho^{-1}) (1 + \sin \ln 2) - \frac{1}{2} \sin \ln \rho \right] \sin \phi + \frac{4}{65} (\rho^3 + \rho^{-3}) \sin 3\phi$ .

5.10.  $u(\rho, \phi) = \frac{7}{8} (1 + \rho \ln \rho - a \ln a \ln \rho) + \frac{r^4(4+a^5)+r^{-4}a^5(4a^3-1)}{32(1+a^8)} \cos 4\phi$ .

5.11.  $u(\rho, \phi) = C + \frac{8}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^2(4m^2-1)} \left( m \ln r + \frac{a^m b^m r^{-m} - r^m}{a^m + b^m} \right) \sin m\phi$ .

5.12.  $u(\rho, \phi) = \frac{2b}{\pi^2} \frac{\ln \rho}{1+h b \ln b} - \frac{4b}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho^m - \rho^{-m}}{m(b^m + b^{-m}) + h b(b^m - b^{-m})} \frac{\cos m\phi}{4m^2 - 1}$ .

5.13.  $u(\rho, \phi) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^{2k+1}}{2k+1} \sin(2k+1)\phi$ .

5.14.  $u(\rho, \phi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{b^2} \cos 2\phi$ .

5.15.  $u(\rho, \phi) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n - \rho^2}{n(n^2-4)} \sin n\phi$ .

5.16.  $u(\rho, \phi) = \rho^3 + \frac{1}{2}\rho \cos \phi + \frac{1}{2}\rho^3 \cos 3\phi + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{9(-1)^n(\rho^3 - \rho^{2n+1})}{\pi(n-1)(n+2)(2n+1)} \cos(2n+1)\phi$ .

5.17.  $w(\rho, \phi) = \sqrt{2}\rho \cos \phi$ ,  $u(\rho, \phi) = \sqrt{2}\rho \sin \phi + \frac{1}{6}\rho^3 \ln(\sqrt{2}\rho) (\sin 3\phi + \cos 3\phi)$ .

5.18.  $u(\rho, \phi) = \phi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}(\rho^2 - b^2) + \left[ \left( \frac{4}{\pi b} - \frac{b^2}{8} \right) \rho + \frac{\rho^3}{8} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\rho/b)^{2k+1}}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)\phi \right]$ .

5.19.  $u(\rho, \phi) = \frac{a}{\rho} \frac{b^2 - \rho^2}{b^2 - a^2} \sin \phi + \frac{b^2}{\rho^2} \frac{\rho^4 - a^4}{b^4 - a^4} \cos 2\phi$ .

5.20.  $u(\rho, \phi) = \frac{3\rho^2 - 2}{5\rho} \sin \phi + \frac{2(\rho^4 + 1)}{17\rho^2} \sin 2\phi$ .

5.21.  $u(\rho, \phi) = \frac{\ln(b/\rho)}{\ln(b/a)} - \frac{a^3}{\rho^3} \frac{b^6 - \rho^6}{b^6 - a^6} \cos 3\phi + \left[ \frac{a^2 b^2 \rho^{-3/2} + (a+b)\rho^{3/2}}{a^2 + b^2 + ab} - \rho^{1/2} \right] \sin \frac{3\phi}{2}$ .

5.22.  $u(\rho, \phi) = [(\rho^2 - 1)b \cos \ln b - (b^2 + 1)\rho \sin \ln \rho] \sin \phi$ .

5.23.  $u(\rho, \phi) = 2\phi(\rho-1) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left( \frac{2^{2n+1}-1}{2^{4n-1}} \rho^{2n} + \frac{2^{4n}-2^{2n+1}}{2^{4n-1}} \rho^{-2n} - \rho \right) \sin 2n\phi$ .

- 5.24.  $u(\rho, \phi) = -\phi - \sin \phi + \frac{\operatorname{sh} \phi}{\operatorname{ch} \pi} \cos \ln \rho$ .
- 5.25.  $u(\rho, \phi) = \frac{1+\rho-e^\rho}{\rho e^\rho} \cos \phi$ .
- 5.26.  $u(\rho, \phi) = \frac{2+\ln \rho}{2\rho} + \frac{2\rho-2+3 \ln \rho}{18\rho^2} \cos 2\phi$ .
- 5.27.  $u(\rho, \phi) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_m \frac{\rho^{-\mu} - \rho^{-|m|}}{\mu^2 - m^2} \Phi_m(\phi)$ .
- 5.28.  $u(\rho, \phi) = e^{-\rho} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \rho^{-2k-1} \int_0^\rho \xi^{2k+1} e^{-\xi} d\xi - \rho^{2k+1} \int_\rho^\infty \xi^{-2k-1} e^{-\xi} d\xi \right) \times$   
 $\cos(2k+1)\phi$  (виражається через інтегральну показникову функцію).
- 5.29. Щоб уникнути узагальнених функцій, розбиваємо на дві області:  $\rho < 1$  і  $\rho > 1$ . Зшиваючи розв'язки, одержимо при  $\rho < 1$   $u(\rho, \phi) = 1 - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \rho^m \sin m\phi$ ,  
а при  $\rho > 1$   $u(\rho, \phi) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \rho^{-m} \sin m\phi$ .
- 5.30.  $u(\rho, \phi) = k^{-2} \left( \rho - b \frac{J_1(k\rho)}{J_1(kb)} \right) \cos \phi + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)} \frac{J_{2k+1}(k\rho)}{J_{2k+1}(kb)} \sin(2k+1)\phi$ .
- 5.31.  $u(\rho, \phi) = \frac{N_1(a)J_1(\rho) - J_1(a)N_1(\rho)}{N_1(a)J_1(b) - J_1(a)N_1(b)} \cos \phi - \frac{N_1(b)J_1(\rho) - J_1(b)N_1(\rho)}{N_1(a)J_1(b) - J_1(a)N_1(b)} \sin \phi$ .
- 5.32.  $u_{nm}(\rho, \phi) = J_m(j_{m,n}\rho/b) \Phi_m(\phi)$ ,  $\lambda_{nm} = (j_{m,n}/b)^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .
- 5.33.  $u_{nm}(\rho, \phi) = J_m(\mu_{m,n}\rho/b) \sin m\phi$ ,  $\lambda_{nm} = (\mu_{m,n}/b)^2$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ , де  $\mu_{m,n}$  –  $n$ -й корінь рівняння  $J'_m(\mu) = 0$ .
- 
- 6.1.  $u(r, \vartheta, \phi) = \left[ \frac{r}{3} \left( \frac{1}{b^3} \int_0^b f(\rho) \rho^3 d\rho - \int_r^b f(\rho) d\rho \right) - \frac{1}{3r^2} \int_0^r f(\rho) \rho^3 d\rho \right] \sin \vartheta \sin \phi$ .
- 6.2.  $u(r, \vartheta, \phi) = 1 - \cos \ln r - \sin \ln r + r^2 \sin 2\vartheta \cos \phi$ .
- 6.3.  $u(r, \vartheta, \phi) = \left( \frac{13}{300} r^3 - \frac{1}{10} r \ln r - \frac{3}{100} r \right) \sin^3 \vartheta \cos 3\phi + \frac{r^3}{3} \sin \vartheta \sin 2\vartheta \sin 2\phi$ .
- 6.4.  $u(r, \vartheta, \phi) = C + (r^3 - 3r) \sin \vartheta \sin(\phi - \phi_0) + r^2 \sin 2\vartheta \sin \phi$ .
- 6.5.  $u(r, \vartheta, \phi) = 1 + r^2 (3 \cos^2 \vartheta - 1) + \cos \vartheta \left[ r \int_0^1 f(\rho) \rho^3 d\rho - r \int_r^1 f(\rho) d\rho - \frac{1}{r^2} \int_0^r f(\rho) \rho^3 d\rho \right]$ .
- 6.6.  $u(r, \vartheta, \phi) = (b/4) ((r/b)^2 \cos \vartheta - 2 \ln r - 1) \sin \vartheta \sin \phi$ .
- 6.7.  $u(r, \vartheta, \phi) = \frac{4}{5} (r - \sqrt{r}) + \frac{3}{5} r \cos \vartheta + r^3 \cos \vartheta (\cos^2 \vartheta - \frac{3}{5})$ .
- 6.8.  $u(r, \vartheta, \phi) = \frac{3}{50} (r - r^3) \cos \vartheta + \frac{8}{70} r^3 \ln r \cdot (5 \cos^2 \vartheta - 3) \cos \vartheta - \frac{1}{5} r \sin \vartheta \sin \phi +$   
 $\frac{4}{5} r^3 (5 \cos^2 \vartheta - 1) \sin \vartheta \sin \phi$ .
- 6.9.  $u(x, y, z) = \frac{5}{h} + \frac{3z}{1+hb} + \frac{5(3x^2-r^2)}{b(2+hb)} + \frac{3z(5x^2-r^2)}{b^2(3+hb)}$ .
- 6.10.  $u(r, \vartheta, \phi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+1}{2k(k+1)(4k^2-1)} \left( \frac{r}{b} \right)^{2k} P_{2k}''(\cos \vartheta) \sin^2 \vartheta \cos 2\phi$ .
- 6.11.  $u(r, \vartheta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[ r^l \left( \int_0^1 f(\rho) \rho^{l+2} d\rho - \int_r^1 f(\rho) \rho^{1-l} d\rho \right) - r^{-1-l} \int_0^r f(\rho) \rho^{l+2} d\rho \right] \times$   
 $c_l P_l(\cos \vartheta)$ , де  $c_{2k} = \frac{1}{2} \int_0^\pi P_{2k}(\cos \vartheta) \sin^2 \vartheta d\vartheta = -\frac{1}{8} \frac{\Gamma(k-1/2)\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+2)}$ ,  $c_{2k+1} = 0$ .
- 6.12. Повернемо систему координат, направивши вісь  $z'$  вздовж осі  $y$ , тоді  
 $\operatorname{sgn}(\pi - \phi) = \operatorname{sgn}(\frac{\pi}{2} - \vartheta')$  і  $u(r, \vartheta') = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (4k+3)}{(k+1)!} \frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(1/2)} \left( \frac{r}{b} \right)^{2k+1} P_{2k+1}(\cos \vartheta')$ .
- 6.13.  $u(r, \vartheta, \phi) = \left( \frac{r^2}{4} - \frac{r}{2} \right) \cos \vartheta + \left( \frac{8r}{17} + \frac{4}{17r^2} \right) \sin \vartheta \sin \phi$ .
- 6.14.  $u(r, \vartheta, \phi) = \left( \frac{r^2}{4} - \frac{17r}{20} + \frac{3}{5r^2} \right) \sin \vartheta \sin \phi + \left( \frac{r}{5} + \frac{4}{5r^2} \right) \cos \vartheta + \frac{4}{3} \left( \frac{1}{r} - 1 \right) +$   
 $\frac{32}{201} \left( r^2 - \frac{1}{r^3} \right) (3 \cos^2 \vartheta - 1)$ .
- 6.15.  $u(r, \vartheta, \phi) = \sin \ln r - \sin \ln a - \cos \ln r + \cos \ln a + 2 \frac{1-ar^{-1}}{1-a^2} \sin \ln a + \frac{a}{r^2} \frac{r^3-a^3}{1-a^6} \sin \vartheta \cos \phi$ .

$$6.16. u(r, \vartheta, \phi) = \frac{13}{3} - 2 \ln 2 - \frac{2 + \ln r}{r} + \left( \frac{4r^2}{67} + \frac{8}{201r^3} \right) (3 \sin^2 \vartheta \cos^2 \phi - 1).$$

$$6.17. u(r, \vartheta, \phi) = (r - 2 \ln r - 1) \sin \vartheta \cos \phi + \left( r + \frac{4}{r^2} \right) \sin 2\vartheta \cos \phi.$$

$$6.18. u(r, \vartheta, \phi) = -\frac{1-2r^{-1}}{2+h} + 2\frac{r^2-32r^{-3}}{98+31h} (3 \cos^2 \vartheta - 1) + \frac{8}{5} \frac{(2+h)r + (1-h)r^{-2}}{17+7h} \sin \vartheta \cos \phi + \frac{32}{5} \frac{(4+h)r^3 + (3-h)r^{-4}}{515+127h} (5 \cos^2 \vartheta - 1) \sin \vartheta \cos \phi.$$

$$6.19. u(r, \vartheta, \phi) = \frac{1-br^{-1}}{1-ba^{-1}} + \frac{1}{3(b^3-a^3)} \left[ \left( r - \frac{b^3}{r^2} \right) \int_a^r f(\rho) (\rho^3 - a^3) d\rho + \left( r - \frac{a^3}{r^2} \right) \int_r^b f(\rho) (\rho^3 - b^3) d\rho \right] \sin \vartheta \cos \phi.$$

$$6.20. u(r, \vartheta, \phi) = a^2 \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{3(a^3+2b^3)} \left[ \left( r - \frac{b^3}{r^2} \right) \int_a^r f(\rho) (2\rho^3 + a^3) d\rho + \left( 2r + \frac{a^3}{r^2} \right) \left( 3b^2 + \int_r^b f(\rho) (\rho^3 - b^3) d\rho \right) \right] \cos \vartheta.$$

$$6.21. u(r, \vartheta, \phi) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k-1}{k(k-1)(4k^2-1)(b^{4k-1}-a^{4k-1})} P_{2k-1}''(\cos \vartheta) \sin^2 \theta \times \left[ (r^{2k-1} - a^{4k-1} r^{-2k}) b^{2k} \cos 2\phi + (b^{4k-1} r^{-2k} - r^{2k-1}) a^{2k} \sin 2\phi \right].$$

$$6.22. u(r, \vartheta, \phi) = \frac{ab^2}{b^3-a^3} \left( \frac{r}{a} - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \vartheta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a^{l+1} b^l}{b^{2l+1} - a^{2l+1}} \left( \frac{b^{l+1}}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{b^l} \right) c_l P_l(\cos \vartheta),$$

$$c_{2k} = \frac{2(-1)^{k+1}(2k-2)!}{4^k(k-1)!(k+1)!}, \quad c_{2k+1} = 0.$$

$$6.23. u(r, \vartheta, \phi) = \frac{1-\ln r}{r} - \frac{\cos \vartheta}{r^2}.$$

$$6.24. u(r, \vartheta, \phi) = \frac{1}{3r} + \frac{3 \sin^2 \vartheta \sin^2 \phi - 1}{3r^3}.$$

$$6.25. u(r, \vartheta, \phi) = \left[ \frac{1}{3r^2} \left( a^3 \int_a^\infty f(\rho) d\rho - \int_a^r f(\rho) \rho^3 d\rho \right) - \frac{r}{3} \int_r^\infty f(\rho) d\rho \right] \cos \vartheta.$$

$$6.26. u(r, \vartheta, \phi) = e^{1-r} \left( 1 + \frac{r}{e} \right) + \left( r - \frac{1}{r^2} \right) \cos \vartheta.$$

$$6.27. u(r, \vartheta, \phi) = -\frac{\arctg r}{2r}.$$

$$6.28. u(r, \vartheta, \phi) = \left[ \left( \frac{2}{r^2} - 1 \right) \sin r - \frac{2}{r} \cos r \right] \sin \vartheta \sin \phi + C, \text{ де } C - \text{ довільна стала.}$$

$$6.29. u(r, \vartheta, \phi) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2} \frac{\Gamma(k-1/2)}{k! \Gamma(1/2)} P_{2k-1}(\cos \vartheta) r^{2k-1}.$$

$$6.30. u(r, \vartheta, \phi) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{8} \frac{\Gamma(k-3/2)}{(k+1)! \Gamma(1/2)} P_{2k-1}(\cos \vartheta) (r^{-2k} \int_0^r e^{-\rho} \rho^{2k+3} d\rho + r^{2k-1} \int_r^\infty e^{-\rho} \rho^{2k+3} d\rho).$$

$$6.31. u(r, \vartheta, \phi) = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{4} \frac{\Gamma(k-1/2)}{k! \Gamma(1/2)} P_{2k-1}^2(\cos \vartheta) \sin 2\phi (r^{-2k} \int_0^r \rho^{2k+1} f(\rho^2) d\rho + r^{2k-1} \int_r^\infty \rho^{2k+1} f(\rho^2) d\rho).$$

$$6.32. \lambda_{nlm} = (j_{l+1/2, n}/b)^2, \quad u_{nlm}(r, \vartheta, \phi) = r^{-1/2} J_{l+1/2}(j_{l+1/2, n} r/b) Y_{lm}(\vartheta, \phi).$$

$$6.33. \lambda_{nlm} = (\mu_{ln}/b)^2, \quad u_{nlm}(r, \vartheta, \phi) = r^{-1/2} J_{l+1/2}(\mu_{ln} r/b) Y_{lm}(\vartheta, \phi), \text{ де } \mu_{ln} - n\text{-й додатний корінь рівняння } \mu J_{l-1/2}(\mu) = (l+1) J_{l+1/2}(\mu).$$

$$6.34. \text{ Див. [5, с. 37].}$$

$$6.35. \text{ Див. [5, с. 41].}$$

У відповідях до цього параграфа вживаються позначення:  $c_{\nu m} = \|R_{\nu m}\|^{-2}$ ,  $R_{\nu m}(\rho) = Z_\nu(\mathcal{X}_{\nu m} \rho)$ ,  $\mathcal{X}_{\nu m} = \mu_{\nu m}/b$ , де  $\mu_{\nu m}$  —  $m$ -й у порядку зростання додатний корінь рівняння  $\alpha Z_\nu(\mu) + \beta Z_\nu'(\mu) = 0$ ,  $Z_\nu$  — явно вказана у відповіді циліндрична функція, а числа  $\alpha$  і  $\beta$  визначаються межовими умовами задачі. Якщо  $\beta = 0$ , то замість  $\mu_{\nu m}$  пишемо  $j_{\nu, m}$ . Якщо сума містить доданки, відповідаючі тільки одному значенню  $\nu$ , то  $\nu$  в позначеннях (крім  $Z_\nu$  і  $j_{\nu, m}$ ) не пишемо.

$$7.1. u(\rho, \phi, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{\operatorname{sh} j_{0, m}(z-1/2)}{2j_{0, m} \operatorname{ch}(j_{0, m}/2)} - \frac{1}{j_{0, m}^2} \right) J_0(j_{0, m} \rho) + \cos 2\phi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} j_{2, m}(z-1/2)}{2j_{2, m} \operatorname{sh}(j_{2, m}/2)} J_2(j_{2, m} \rho).$$

$$7.2. u(\rho, \phi, z) = \cos 2\phi \sum_{m=1}^{\infty} c_m u_m(z) J_2(\kappa_m \rho), \text{ де } u_m(z) = \frac{j_{2,m} J_1(j_{2,m}) + 2J_0(j_{2,m})}{\kappa_m^3 \operatorname{ch} \kappa_m l} \times$$

$$\left[ \operatorname{ch} \kappa_m(l-z) \int_0^z f(\zeta) \operatorname{sh} \kappa_m \zeta d\zeta + \operatorname{sh} \kappa_m z \int_z^l f(\zeta) \operatorname{ch} \kappa_m(l-\zeta) d\zeta \right].$$

$$7.3. u(\rho, \phi, z) = \sum_{k=0}^1 \cos 2k\phi \sum_{m=1}^{\infty} c_{2k,m} u_{2k,m}(z) J_{2k}(\kappa_{2k,m} \rho), \text{ де}$$

$$u_{nm}(z) = (\kappa_{nm} \operatorname{sh} \kappa_{nm} l)^{-1} [u'_{nm}(l) \operatorname{ch} \kappa_{nm} z - u'_{nm}(0) \operatorname{ch} \kappa_{nm}(l-z)],$$

$$u'_{0m}(0) = b^4 [j_{0,m} J_1(j_{0,m}) + J_2(j_{0,m})] / 2j_{0,m}^2, u'_{0m}(l) = b^2 J_1(j_{0,m}) / 2j_{0,m},$$

$$u'_{2m}(0) = -b^4 J_3(j_{2,m}) / 2j_{2,m}^3, u'_{2m}(l) = -b^2 [j_{2,m} J_1(j_{2,m}) + J_0(j_{2,m})] / 2j_{2,m}^2.$$

$$7.4. u(\rho, \phi, z) = \sum_{k=0}^1 \cos(2k+1)\phi \sum_{m=1}^{\infty} c_{2k+1,m} u_{2k+1,m}(z) J_{2k+1}(\kappa_{2k+1,m} \rho), \text{ де}$$

$$\mu_{nm} - m\text{-й додатний корінь рівняння } \mu J'_n(\mu) + b h J_n(\mu) = 0,$$

$$u_{nm}(z) = a_{nm} (A_{nm} \operatorname{ch} \kappa_{nm}(l-z) + B_{nm} \operatorname{sh} \kappa_{nm} z - \kappa_{nm}^{-2} e^z),$$

$$a_{1m} = 3b^5 [\mu_{1m} J_2(\mu_{1m}) - 2J_3(\mu_{1m})] / 4\mu_{1m}^2, a_{3m} = b^5 J_4(\mu_{3m}) / 4\mu_{1m}, A_{nm} = (\kappa_{nm}^2 \operatorname{ch} \kappa_{nm} l)^{-1}, B_{nm} = e^l (\kappa_{nm}^3 \operatorname{ch} \kappa_{nm} l)^{-1}.$$

$$7.8. u(\rho, \phi, z) = \frac{2b^2}{\pi^2 \sqrt{\rho}} \sin \frac{\phi}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m^2 \operatorname{ch} \kappa_m l} \operatorname{sh} \kappa_m(l-z) \sin \kappa_m \rho, \text{ де } \kappa_m = \frac{m\pi}{b}.$$

$$7.10. u(\rho, \phi, z) = -b^4 \sin 2\phi \cos \pi z \sum_{m=1}^{\infty} c_m (\pi^2 + \kappa_m^2)^{-1} j_{2,m}^{-1} J_3(j_{2,m}) J_2(\kappa_m \rho).$$

$$7.11. u(\rho, \phi, z) = \sin(3\phi/2) \sum_{m=1}^{\infty} c_m u_m(z) R_m(\rho), \text{ де } R_m(\rho) = (\kappa_m \rho)^{-3/2} \sin \kappa_m \rho -$$

$$(\kappa_m \rho)^{-1/2} \cos \kappa_m \rho, \mu_m - m\text{-й додатний корінь рівняння } \operatorname{tg} \mu = \mu;$$

$$u_m(z) = [u_m(0) \operatorname{sh} \kappa_m(l-z) + u_m(l) \operatorname{sh} \kappa_m z] / \operatorname{sh} \kappa_m l,$$

$$u_m(0) = \kappa_m^{-5/2} (2 - \mu_m \sin \mu_m - 2 \cos \mu_m), u_m(l) = -\kappa_m^{-7/2} \mu_m^2 \sin \mu_m.$$

$$7.12. u(\rho, \phi, z) = \cos(3\phi/2) \sum_{m=1}^{\infty} c_m u_m(z) R_m(\rho), \text{ де } R_m \text{ така ж, як у задачі}$$

$$7.11, \text{ а } \mu_m - m\text{-й додатний корінь рівняння } 3 \operatorname{ctg} \mu = 3\mu^{-1} - 2\mu;$$

$$u_m(z) = -((\pi/2)^2 + \kappa_m^2)^{-1} \mu_m^2 \sin \mu_m \sin(\pi z/2).$$

$$7.13. u(\rho, \phi, z) = \frac{2}{\pi \sqrt{\rho}} \cos \frac{\phi}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a + (-1)^{m+1} b}{m} \frac{\operatorname{sh} \gamma_m(z-l) \sin \gamma_m(\rho-a)}{\gamma_m \operatorname{ch} \gamma_m l + h \operatorname{sh} \gamma_m l}, \text{ де } \gamma_m = \frac{m\pi}{b-a}.$$

$$7.17. u(\rho, \phi, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{\omega_k} \frac{I_0(\omega_k \rho)}{I_0(\omega_k)} \cos \omega_k z, \text{ де } \omega_k = \pi(k + 1/2).$$

$$7.18. u(\rho, \phi, z) = I_0^{-1}(\omega b) \left[ V(\omega \rho) \int_0^\rho x f(x) I_0(\omega x) dx + I_0(\omega \rho) \int_\rho^b x f(x) V(\omega x) dx \right] +$$

$$I_1^{-1}(b) I_1(\rho) \cos \phi, \text{ де } \omega = \pi/l, V(y) = K_0(\omega b) I_0(y) - I_0(\omega b) K_0(y).$$

$$7.19. u(\rho, \phi, z) = \frac{1}{2} \cos \phi \left( \frac{I_1(3\pi \rho) \sin 3\pi z}{3\pi I_1'(3\pi b) + I_1(3\pi b)} - \frac{I_1(\pi \rho) \sin \pi z}{\pi I_1'(\pi b) + I_1(\pi b)} \right).$$

$$7.26. u(\rho, \phi, z) = \sqrt{\frac{b}{\rho}} \sin \frac{\phi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{\operatorname{sh} \omega_k \rho}{\operatorname{sh} \omega_k b} \sin \omega_k z, \text{ де } \omega_k = \frac{k\pi}{l}, g_k = \frac{2}{l} \int_0^l g(z) \sin \omega_k z dz.$$

$$7.31. \text{ Межові умови розривні, тому доцільно розкласти на дві задачі:}$$

$$u(\rho, \phi, z) = \phi - v_1(\rho, \phi, z) - v_2(\rho, \phi, z).$$

$$\text{Тоді } v_1(\rho, \phi, z) = \sum_{n=1}^{\infty} (\phi)_n \sin n\phi \sum_{m=1}^{\infty} (1)_m \frac{\operatorname{ch}(z/2)}{\operatorname{ch}(l/2)} R_{nm}(\rho),$$

$$\text{де } (\phi)_n = 2n^{-1}(-1)^{n+1}, R_{nm}(\rho) = N_n(\gamma_m a) J_n(\gamma_m \rho) - J_n(\gamma_m a) N_n(\gamma_m \rho),$$

$$\gamma_m - m\text{-й додатний корінь рівня } \frac{J_n(\gamma a)}{N_n(\gamma a)} = \frac{J_n(\gamma b)}{N_n(\gamma b)}, (1)_m = \|R_{nm}\|^{-2} \int_a^b R_{nm}(\rho) \rho d\rho;$$

$$\text{а } v_2(\rho, \phi, z) = \sum_{n=1}^{\infty} (\phi)_n \sin n\phi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{K_n(\omega_k a) I_n(\omega_k \rho) - I_n(\omega_k a) K_n(\omega_k \rho)}{K_n(\omega_k a) I_n(\omega_k b) - I_n(\omega_k a) K_n(\omega_k b)} \cos \omega_k z,$$

$$\text{де } \omega_k = \frac{\pi}{l} \left( k + \frac{1}{2} \right).$$

$$7.32. u(\rho, \phi, z) = \left( \frac{z}{\rho} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{K_1(\pi n \rho)}{K_1(\pi n)} \sin \pi n z \right) \sin \phi.$$

$$7.33. u(\rho, \phi, z) = e^{-z} + \sum_{n=1}^{\infty} (1)_n \frac{\exp(-z) - j_{0,n} \exp(-j_{0,n} z)}{j_{0,n}^2 - 1} J_0(j_{0,n} \rho),$$

$$\text{де } (1)_n = \|J_0\|^{-2} \int_0^1 J_0(j_{0,n}\rho) \rho d\rho.$$

$$7.35. u(\rho, \phi, z) = \frac{z}{\rho^2} \cos 2\phi + 2 \sin \phi \sum_{n=0}^{\infty} \varkappa_n^{-2} \left( K_1(\varkappa_n \rho) - \frac{1}{\varkappa_n \rho} \right) \sin \varkappa_n z,$$

$$\text{де } \varkappa_n = \pi(n + 1/2).$$

$$7.36. u(\rho, \phi, z) = \left[ \frac{K_1(\sqrt{2}\rho)}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\rho} + \left( \frac{K_1(\sqrt{10}\rho)}{\sqrt{10}} - \frac{1}{10\rho} \right) (4z^2 - 1) \right] e^{-z^2} \sin \phi.$$


---

$$8.2. x^{n-1}.$$

$$8.3. \mathcal{P}_x^{\frac{1}{x}} \text{ при } n = 1 \text{ і } x^{n-2} \text{ для } n \geq 2.$$

$$8.4. (f(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}), \varphi(\mathbf{x})) = (f(\boldsymbol{\xi}), |\det \mathbf{A}^{-1}| \varphi(\mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{b}))).$$

$$8.5. \delta(x)/|\alpha|.$$

$$8.6. \frac{\delta(x+a) + \delta(x-a)}{2a}.$$

$$8.8. \left( \delta_a^{(n)}, \phi \right) = (-1)^n \phi^{(n)}(a).$$

$$8.9. (-1)^n n! \delta(x).$$

$$8.10. 2\delta(x).$$

$$8.11. \operatorname{sgn} x.$$

$$8.12. \theta(x).$$

$$8.13. \delta(x+1) - \delta(x-1).$$

$$8.14. \theta(x) \cos x.$$

$$8.15. \delta(x) - \theta(x) \sin x.$$

$$8.16. \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - \pi n).$$

$$8.17. \theta(\sin x) \cos x.$$

$$8.18. \mathcal{P}_x^{\frac{1}{x}}.$$

$$8.19. -2\mathcal{P}_{x^3}^{\frac{1}{x^3}}, \text{ де } \mathcal{P}_{x^n}^{\frac{1}{x^n}} = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \varphi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k \right) x^{-n} dx.$$

$$8.20. \mp \delta'(x) - \mathcal{P}_{x^2}^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$8.21. e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \check{f}(\mathbf{k}).$$

$$8.22. \pi \delta(k) + i e^{iak} \mathcal{P}_k^{\frac{1}{k}}.$$

$$8.23. 2i \mathcal{P}_k^{\frac{1}{k}}.$$

$$8.24. -2\mathcal{P}_{k^2}^{\frac{1}{k^2}}.$$

$$8.25. 0 \text{ якщо } n > m, \text{ інакше } (-i)^{n+m} \frac{m!}{(m-n)!} k^{m-n}.$$

$$8.26. 2\pi \delta(k - ia).$$

$$8.27. i\pi [\delta(k-a) - \delta(k+a)].$$

$$8.28. \pi [\delta(k-a) + \delta(k+a)].$$


---

$$9.1. u(x, t) = (1 + 4c^2 t)^{-1/2} \exp\left(-\frac{c^2 x^2 + t}{1 + 4c^2 t}\right) \cos\left(\frac{x}{1 + 4c^2 t}\right).$$

$$9.2. u(x, t) = (2t + (x + 2ct)^2) e^{cx + c^2 t}.$$

$$9.3. u(x, t) = (1 + 4c^2 t)^{-1/2} \exp\left(-\frac{c^2 x^2 + t}{1 + 4c^2 t}\right) \sin\left(\frac{x}{1 + 4c^2 t}\right).$$

$$9.4. u(x, t) = e^{cx + c^2 t - t} \cos(x + 2ct).$$

$$9.5. u(x, t) = (1 + 4c^2 t)^{-3/2} x \exp\left(-\frac{c^2 x^2}{1 + 4c^2 t}\right).$$



- 9.6.  $u(x, t) = e^{cx+e^{2t}-t} \sin(x + 2ct)$ .
- 9.7.  $u(x, t) = e^{-t} (x \cos x - 2t \sin x)$ .
- 9.8.  $u(x, t) = e^{-t} (x \sin x + 2t \cos x)$ .
- 9.9.  $u(x, t) = e^x (e^t - 1 - t)$ .
- 9.10.  $u(x, t) = te^{x+t}$ .
- 9.11.  $u(x, t) = (e^{-t} - 1 + t) \sin x$ .
- 9.12.  $u(x, t) = e^{-t}$ .
- 9.13.  $u(x, t) = e^t (1 - \ln 2 + \ln(1 + e^{-t})) - 1$ .
- 9.14.  $u(x, y, t) = (e^t/6 - e^{-t}/2 + e^{-2t}/3) \cos(x - y)$ .
- 9.15.  $u(x, y, t) = (x + y^2)^2 + 4tx + 12ty^2 + 12t^2 + 2t$ .
- 9.16.  $u(x, y, t) = (1 + 100t)^{-1/2} \exp\left(-\frac{(3x+4y)^2}{1+100t}\right)$ .
- 9.17.  $u(x, y, t) = e^{-2t} \sin(x + y)$ .
- 9.18.  $u(x, y, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t [(t - \tau)(169\tau^2 + 1)]^{-1/2} \exp\left[-\frac{(12x-5y)^2}{169\tau^2+1}\right] d\tau$ .
- 9.19.  $u(\rho, \phi) = I_0(\rho) \operatorname{sh} t$ .
- 9.20.  $u(\rho, \phi) = e^{-t} J_0(\rho)$ .
- 9.21.  $u(\rho, \phi) = e^t I_\nu(\rho) \sin \nu \phi$ .
- 9.22.  $u(\rho, \phi) = (e^{-t} - 1 + t) J_\nu(\rho) \cos \nu \rho + (\rho \cos \phi)^2 + 2t$ .
- 9.23.  $u(x, y, z, t) = (y + 2t)e^y J_0(\sqrt{x^2 + z^2})$ .
- 9.24.  $u(x, y, z, t) = ((4t + 1) \cos x + 4t \sin x) e^{2x+4t} I_0(\sqrt{y^2 + z^2})$ .
- 9.25.  $u(x, y, z, t) = (x \sin x + 2t \cos x) I_0(\sqrt{y^2 + z^2})$ .
- 9.26.  $u(x, y, z, t) = (1 - (t + 1)e^{-t} + (1 - e^{-t})z^2) J_0(\sqrt{x^2 + y^2})$ .
- 9.27.  $u(x, y, z, t) = e^{-9t} \sin(x - 2y + 2z)$ .
- 9.28.  $u(x, y, z, t) = \frac{1}{730} (e^{27t} - 27 \sin t - \cos t) \operatorname{ch}(x + y - 5z)$ .
- 9.29.  $u(r, \vartheta, \phi, t) = r \cos \vartheta$ .
- 9.30.  $u(r, \vartheta, \phi, t) = -(2/3)t^3 r \sin \vartheta \sin \phi$ .
- 9.31.  $u(r, \vartheta, \phi, t) = (1 - e^{-t})r \sin \vartheta \cos \phi + r^2 \cos \vartheta \sin \vartheta \cos \phi$ .
- 9.32.  $u(r, t) = 4\sqrt{\pi T} e^{Tr^2} I_0(Tr^2)$ , где  $T = (8t(1 + 4at))^{-1}$ .
- 9.33.  $u(r, t) = e^{-c^2 t} r^{-1} \sin cr$ .
- 9.34.  $u(r, t) = e^{c^2 t} r^{-1} \operatorname{sh} cr$ .
- 9.35.  $u(r, t) = e^{c^2 t} (\operatorname{ch} cr + 2ctr^{-1} \operatorname{sh} cr)$ .
- 9.36.  $u(r, t) = e^{-c^2 t} (\cos cr - 2ctr^{-1} \sin cr)$ .
- 9.37.  $G(\mathbf{x}, t) = e^{ct} G_d(\mathbf{x} + \mathbf{b}t, t)$ , где  $G_d$  даётся формулой (9.3).
- 9.38.  $u(x, y, z, t) = e^{-t} (x^2 y - 4x^2 t + 4xty - 16xt^2 + 4yt^2 - 16t^3 + 2yt - 8t^2)$ .

- 10.1.  $u(x, t) = \theta(t - |x|) + 2e^{t-x} \theta(x - t) - 2e^{-t-x} \theta(x + t)$ .
- 10.2.  $u(x, t) = \frac{1+\cos(t-x)}{2} \theta(\pi - |t - x|) - \frac{1+\cos(t+x)}{2} \theta(\pi - |t + x|)$ .

$$10.3. u(x, t) = \frac{1}{2}e^{-|t-|x||} + \frac{1}{2}e^{-t-|x|} - e^{-|x|} + (t - |x|)_+.$$

$$10.4. u(x, t) = \frac{1}{2}e^{-|t-|x||} + \frac{1}{2}e^{-t-|x|} - e^{-|x|} \cos t + \theta(t - |x|) \sin(t - |x|).$$

$$10.5. u(x, t) = \frac{1}{4}(x+t)_+^2 + \frac{1}{4}(x-t)_+^2 - \frac{1}{2}x_+^2.$$

$$10.6. u(x, t) = \frac{1}{4}h(x+t) + \frac{1}{4}h(x-t) - \frac{1}{2}h(x), \text{ де } h(y) = (y+1)_+^2 - (y-1)_+^2.$$

$$10.8. u(x, t) = -2a^2 \int_0^t G(x, t-\tau) \mu(\tau) d\tau, \text{ де } G \text{ дається формулою (9.4).}$$

$$10.23. G(x, t) = \frac{1}{2a} \theta\left(t - \frac{|x|}{a}\right) I_0\left(\frac{\gamma}{2} \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{a^2}}\right) e^{-\gamma t/2}.$$

$$10.24. G(x, t) = \frac{1}{2a} \theta\left(t - \frac{|x|}{a}\right) I_0\left(\mu \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{a^2}}\right) e^{-\gamma t/2}, \text{ при } c + \gamma^2/4 = \mu^2 > 0;$$

$$G(x, t) = \frac{1}{2a} \theta\left(t - \frac{|x|}{a}\right) J_0\left(\mu \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{a^2}}\right) e^{-\gamma t/2}, \text{ при } c + \gamma^2/4 = -\mu^2 < 0.$$

$$10.25. G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi ia^2 t}} \exp\left(i \frac{x^2}{4a^2 t}\right).$$

$$10.26. G(x, \xi, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi ia^2 t}} \exp\left[i \frac{(x-ba^2t^2-\xi)^2}{4a^2 t} + ibxt - i \frac{b^2 a^2 t^3}{3}\right].$$

$$10.27. G(x, \xi, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi ia^2 \omega^{-1} \sin \omega t}} \exp\left[\frac{2x\xi - (x^2 + \xi^2) \cos \omega t}{4ia^2 \omega^{-1} \sin \omega t}\right].$$

У відповідях до цього параграфа  $r = |\mathbf{x}|$ ,  $b = |\mathbf{b}|$ .

$$11.1. u(\mathbf{x}, t) = x^3 - 3xy^2 - 2x^2y + y^3 + 3x^2z - yz^2 - z^3 + c^{-2}((1-ct)e^{ct} - 1).$$

$$11.2. u(\mathbf{x}, t) = \cos bt \sin \mathbf{b}\mathbf{x}.$$

$$11.3. u(\mathbf{x}, t) = t^3 z/6 + b^{-1} \operatorname{sh} bt e^{b\mathbf{x}}.$$

$$11.4. u(\mathbf{x}, t) = 20t^3 xyz^2 + (t^5 + t)xy + \cos 3t \sin(x - 2y + 2z).$$

$$11.5. u(\mathbf{x}, t) = (e^{-t} + t - 1)(x^2y + 2y) + (t^3/3 - t^2)y + \frac{1}{2}[u_0(2x - y - 2z + 3t) + u_0(2x - y - 2z - 3t)], \text{ де } u_0(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}.$$

$$11.6. u(\mathbf{x}, t) = tr \sin \vartheta \sin \phi.$$

$$11.7. u(\mathbf{x}, t) = ((t+2) \ln(t+1) - 2t)r^2 \sin 2\vartheta \cos \phi.$$

$$11.8. u(\mathbf{x}, t) = xJ_0\left(\sqrt{y^2 + z^2}\right) \cos at.$$

$$11.9. u(\mathbf{x}, t) = e^y J_0\left(\sqrt{x^2 + z^2}\right) \sin^2 t.$$

$$11.10. u(\mathbf{x}, t) = tI_0\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \sin z.$$

$$11.11. u(\mathbf{x}, t) = (t - \ln(t+1))e^y J_0\left(\sqrt{x^2 + z^2}\right).$$

$$11.12. u(\mathbf{x}, t) = e^x [y^2 z^2 (\operatorname{sh} t - \sin t) + (y^2 + z^2)(t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t + \sin t) + (t-2)(t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t) - 2 \sin t].$$

$$11.13. u(\mathbf{x}, t) = ((r+at)^3 - |r-at|^3)/6ar.$$

$$11.14. u(\mathbf{x}, t) = r^2 + 3t + (b^2 - 1)^{-1} (\operatorname{ch} bt + b^{-1} \operatorname{sh} bt - e^t) e^{b\mathbf{x}}.$$

$$11.15. u(\mathbf{x}, t) = t \sin t \cos \mathbf{b}\mathbf{x} (t \cos t - \sin t) \sin \mathbf{b}\mathbf{x} + (2r)^{-1} \left[ (1 + (r+t)^2)^{-1/2} (r+t) + (1 + (r-t)^2)^{-1/2} (r-t) \right].$$

$$11.16. u(\mathbf{x}, t) = (6r)^{-1} t^3 \theta(r-t) + (r^2/6 - tr/2 + t^2/2) \theta(t-r) + t(x+y-z)^2 + t^3.$$

$$11.17. u(\mathbf{x}, t) = (4r)^{-1} [2t + r \vee t - (r+t) \ln(r+t) + (r-t)_+ \ln(r-t)].$$

- 11.18.  $u(\mathbf{x}, t) = ((t+1) \ln(t+1) - t)(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)$ .  
 11.19.  $u(\mathbf{x}, t) = x^2 + y^2 + 2a^2t^2$ .  
 11.20.  $u(\mathbf{x}, t) = t^3x^2y^2 + 21t^5(x^2 + y^2) + 2t^7$ .  
 11.21.  $u(\mathbf{x}, t) = I_\nu(\rho) \cos \nu \phi \operatorname{ch} \nu t + 4t^{5/2} - 1$ .  
 11.22.  $u(\mathbf{x}, t) = t \operatorname{sh} t I_0(\rho)$ .  
 11.23.  $u(\mathbf{x}, t) = a^{-1}x(\operatorname{arctg}(at + y) + \operatorname{arctg}(at - y))$ .  
 11.24.  $u(\mathbf{x}, t) = e^{-x}((y^2 - 1) \operatorname{sh} t + t \operatorname{ch} t)$ .  
 11.25.  $u(\mathbf{x}, t) = [(t - \sin t)x^2 + t(2 + \cos t - 3 \sin t)] \cos y$ .  
 11.26.  $u(\mathbf{x}, t) = txy^2 + t^2x + t^3(6x + 8y)^2 + 10t^5$ .  
 11.27.  $u(\mathbf{x}, t) = tx^3y + t^3xy + xe^y((y - 1) \operatorname{sh} t + t \operatorname{ch} t)$ .  
 11.28.  $u(\mathbf{x}, t) = x \int_0^t \frac{\operatorname{sh} \tau(t-\tau)}{\tau} e^{\tau y} d\tau$ .  
 11.29.  $u(\mathbf{x}, t) = y [2(1 - x^2) \operatorname{arctg} x - 2t \ln(x^2 + 1) + ((x + t)^2 - 1) \operatorname{arctg}(x + t) + ((x - t)^2 - 1) \operatorname{arctg}(x - t) - (x + t) \ln((x + t)^2 + 1) - (x - t) \ln((x - t)^2 + 1)]$ .  
 11.30.  $u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \cos y \int_{-t}^t J_0(\sqrt{t^2 - \xi^2}) \frac{x - \xi}{(x - \xi)^2 + 1} d\xi$ .  
 11.31.  $u(\mathbf{x}, t) = \left( t/2 - \left( t^3 - (t^2 - r^2)_+^{3/2} \right) / 3r^2 \right) \sin 2\phi$ .  
 11.32. При  $d = 1$   $u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \theta(a\tau - |x - b\tau|) g(t - \tau) d\tau$ ; при  $d = 2$   $u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \frac{\theta(a\tau - |x - b\tau|)}{\sqrt{a^2\tau^2 - |x - b\tau|^2}} d\tau$ ; при  $d = 3$   $u(\mathbf{x}, t) = (4\pi a^2 |x - bt|)^{-1} g(t - a^{-1}|x - bt|)$ .  
 11.33.  $G(x, y, t) = \theta(s) (2\pi a \sqrt{s})^{-1} \operatorname{ch}(a^{-1} \mu \sqrt{s})$ , де  $s = a^2 t^2 - x^2 - y^2$ .  
 11.34.  $G(x, y, t) = \theta(s) (2\pi a \sqrt{s})^{-1} \cos(a^{-1} \mu \sqrt{s})$ , де  $s = a^2 t^2 - x^2 - y^2$ .

- 12.1. Фіктивний заряд у точці  $(x, y, -z)$ .  
 12.2. Фіктивні заряди в точках  $(-x, y, z)$ ,  $(x, -y, z)$ ,  $(-x, -y, z)$ .  
 12.3. Фіктивні заряди одержуються дією групи  $C_{nv}$ .  
 12.4. Фіктивні заряди у точках  $(\pm x, \pm y, \pm z)$ .  
 12.5. Фіктивні заряди одержуються дією групи  $D_{nh}$ .  
 12.6. Фіктивні заряди, одержуються дією групи  $O_h$ .  
 12.7. Фіктивні заряди одержуються дією групи  $Y_h$ .  
 12.19. Відображення на верхню півплощину:  $w(z) = e^z$ .  
 12.20. Відображення на верхню півплощину:  $w(z) = \operatorname{sh} z$ .  
 12.22.  $u(x, y) = \frac{1}{\pi} \left[ \operatorname{arctg} \frac{1 - \cos x \operatorname{ch} y}{\sin x \operatorname{sh} y} + \operatorname{arctg} \frac{1 + \cos x \operatorname{ch} y}{\sin x \operatorname{sh} y} \right] \left( w(z, \zeta) = \frac{\cos z - \cos \zeta}{\cos z - \cos \zeta^*} \right)$ .  
 12.31. У параболічних координатах  $\Delta u = \frac{u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}}{\xi^2 + \eta^2}$ .  
 $u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n/2 + 1)}{\sqrt{\pi} \xi} W_{-\frac{n}{2} - \frac{1}{4}, \frac{1}{4}}(\xi^2) \psi_n H_n(\eta) e^{-\eta^2/2}$ , де  
 $\psi_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \left( \int_{-\infty}^0 \psi_-(-\eta^2/2) H_n(\eta) e^{-\eta^2/2} d\eta + \int_0^{\infty} \psi_+(-\eta^2/2) H_n(\eta) e^{-\eta^2/2} d\eta \right)$ ,  
 а  $W_{\mu, \nu}$  – функція Вітекера [1, 2, 14]. Зауважимо, що вказаній області зміни параболічних координат  $(\xi \in \mathbb{R}_+, \eta \in \mathbb{R})$  відповідає розріз декартової площини по променю  $\{x \leq 0, y = 0\}$ .  
 12.32.  $u = (1 - \operatorname{erf}(\sqrt{\pi} \xi)) e^{\pi x}$ , де  $\operatorname{erf} x = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^x e^{-t^2} dt$  – інтеграл помилок.

12.33. В еліптичних координатах  $\Delta u = \frac{1}{a^2} \frac{u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}}{\operatorname{sh}^2 \xi + \sin^2 \eta}$ .

$u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{e_n}(\xi, q)}{C_{e_n}(0, q)} \psi_n \operatorname{se}_n(\eta, q)$ , де  $\psi_n = \frac{2}{(1 + \delta_{n0})\pi} \int_0^{\pi} \psi(a \cos \eta) \operatorname{se}_n(\eta, q) d\eta$ , а  $\operatorname{se}_n$  і  $C_{e_n}$  – функції Мат'є і модифіковані функції Мат'є першого роду модуля  $q = \frac{k^2 a^2}{4}$  [4, 14]. Зауважимо, що вказаній області зміни еліптичних координат ( $\xi \in \mathbb{R}_+$ ,  $\eta \in ]0, 2\pi[$ ) відповідає розріз декартової площини по відрізку  $\{|x| \leq a, y = 0\}$ . Якщо ж розріз необхідно провести по півпрямих  $\{|x| \geq a, y = 0\}$ , то  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $\eta \in ]0, \pi[$ .

12.39.  $u(x, y) = y^3 - 3x^2 y$ .

12.40.  $u(x, y, z) = (x^2 - y^2 + xy)z$ .

12.42.  $u(x, y, z) = (2/\pi) \operatorname{arctg}(z/y)$ .

# Література

- [1] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. — М., 1979.
- [2] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. — М., 1965.
- [3] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены. — М., 1966.
- [4] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. — М., 1967.
- [5] Білоколог Є.Д., Юрачківський А.П., Шека Д.Д. Спеціальні функції в задачах математичної фізики. — К., 2000.
- [6] Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. — М., 1982.
- [7] Бицадзе А.В., Калинин Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. — М., 1977.
- [8] Боголюбов А.Г., Кравцов В.В. Задачи математической физики. — М., 1998.
- [9] Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. — М., 1972.
- [10] Вірченко Н.О. Основні методи розв'язання задач математичної фізики. — К., 1997.
- [11] Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. — М., 2000.
- [12] Годунов С.К. Уравнения математической физики. — М., 1971.
- [13] Голод П.І., Клімич А.У. Математичні основи теорії симетрій. — К., 1992.
- [14] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М., 1962.
- [15] Колоколов И.В., Кузнецов Е.А., Мильштейн А.И. и др. Задачи по математическим методам физики. — М., 2002.
- [16] Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, Т.1. — М.-Л., 1951.

- [17] Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию. — М., 1970.
- [18] Ляшко І.І., Боярчук О.К., Гай Я.Г., Калайда О.Ф. Диференціальні рівняння. — К., 1981.
- [19] Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. В 2-х т. — М., 1958.
- [20] Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. — М., 1984.
- [21] Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. — М., 2001.
- [22] Сборник задач по уравнениям математической физики / Под ред. В.С. Владимирова. — М., 2001.
- [23] Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.4. — М.-Л., 1951.
- [24] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М., 1977.
- [25] Шубин М.А. Лекции об уравнениях математической физики. — М., 2001.
- [26] Эллиот Дж., Добер П. Симметрия в физике. В 2-х т. — М., 1983.
- [27] Юрачківський А.П., Грязнова В.О. Метод відокремлення змінних у задачах математичної фізики. — К., 1998.
- [28] Pinsky M.A. Partial differential equations and boundary value problems with applications. — N.Y., 1991.

Навчальне видання

Юрачківський Андрій Павлович  
Жугаєвич Андрій Яремович

# Математична фізика в прикладах і задачах

Навчальний посібник для студентів природничих факультетів

*Оригінал-макет виготовлено авторами  
за допомогою видавничого пакета  $\text{\LaTeX}2\epsilon$*