

Приклад 0.1

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} + 2tx + 1, \\ u_x(-l, t) &= t^2, \\ u(l, t) &= lt^2 + t, \\ u(x, 0) &= \cos \frac{\pi x}{4l} - \sin \frac{\pi x}{4l}. \end{aligned}$$

□ Тут $\chi_1(t) = t^2$, $\chi_2(t) = lt^2 + t$. Оскільки межові умови неоднорідні, то відразу виконувати відокремлення змінних не можна. Підбираємо спочатку функцію w таку, що

$$w_x(-l, t) = \chi_1(t), \quad w(l, t) = \chi_2(t). \quad (0.1)$$

Шукаємо її у вигляді (15). Підстановка цього виразу в рівності (0.1) дає систему рівнянь

$$\begin{cases} Q = \chi_1, \\ R + lQ = \chi_2, \end{cases}$$

розв'язавши яку знаходимо

$$w(x, t) = \chi_2(t) + (x-l)\chi_1(t) \equiv t + xt^2. \quad (0.2)$$

Вводимо нову невідому функцію $v = u - w$. Замінивши u на $v+w$ в рівнянні і крайових умовах, одержимо з урахуванням (0.1) і очевидних рівностей $w_{xx}=0$, $w_t(x, t) = 2xt + 1$, $w(x, 0) = 0$, крайову задачу для v (конкретизацію (00))

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, \\ v_x(-l, t) = 0, \quad v(l, t) = 0, \\ v(x, 0) = \cos \frac{\pi x}{4l} - \sin \frac{\pi x}{4l}, \end{cases}$$

до якої вже можна застосовувати алгоритм відокремлення змінних.

1. Записуємо задачу ШЛ:

$$X'' = -v^2 X, \quad X'(-l) = 0, \quad X(l) = 0.$$

Оскільки одна з межових умов не другого роду, то число нуль не власне. При $v > 0$ підставляємо загальний розв'язок (16) диференціального рівняння в межові умови і одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} A \sin vl + B \cos vl = 0, \\ A \cos vl + B \sin vl = 0 \end{cases} \quad (0.3)$$

відносно A і B . Для того, щоб вона мала ненульовий розв'язок, необхідно і достатньо, щоб її визначник дорівнював нулю, тобто справджувалась рівність $\cos 2vl = 0$. З неї знаходимо власні числа v_n^2 :

$$v_n = \frac{(2n+1)\pi}{4l}, \quad n \in Z_+. \quad (0.4)$$