Приклад 0.1

$$
\begin{aligned}
&u_t = a^2 u_{xx} + 2tx + 1,\\
&u_x(-l,t) = t^2,\\
&u(l,t) = lt^2 + t,\\
&u(x,0) = \cos\frac{\pi x}{4l} - \sin\frac{\pi x}{4l}.
\end{aligned}
$$

$\triangleleft$ Тут $\chi_1(t) = t^2$, $\chi_2(t) = lt^2 + t$. Оскільки межові умови неоднорідні, то відразу виконувати відокремлення змінних не можна. Підбираємо спочатку функцію w таку, що

$$
w_x(-l,t) = \chi_1(t), \quad w(l,t) = \chi_2(t). \tag{0.1}
$$

Шукаємо її у вигляді (15). Підстановка цього виразу в рівності (0.1) дає систему рівнянь

$$
\begin{cases} Q = \chi_1,\\ R + lQ = \chi_2, \end{cases}
$$

розв'язавши яку знаходимо

$$
w(x,t) = \chi_2(t) + (x-l)\chi_1(t) \equiv t + xt^2. \tag{0.2}
$$

Вводимо нову невідому функцію $v = u - w$. Замінивши u на $v + w$ в рівнянні і крайових умовах, одержимо з урахуванням (0.1) і очевидних рівностей $w_{xx} = 0$, $w_t(x,t) = 2xt + 1$, $w(x,0) = 0$, крайову задачу для v (конкретизацію (00))

$$
\left\| \begin{array}{l} v_t = a^2 v_{xx},\\ v_x(-l,t) = 0, \quad v(l,t) = 0,\\ v(x,0) = \cos\frac{\pi x}{4l} - \sin\frac{\pi x}{4l}, \end{array} \right.
$$

до якої вже можна застосовувати алгоритм відокремлення змінних.

1. Записуємо задачу ШЛ:

$$
X'' = -\nu^2 X, \quad X'(-l) = 0, \quad X(l) = 0.
$$

Оскільки одна з межових умов не другого роду, то число нуль не власне. При $\nu > 0$ підставляємо загальний розв'язок (16) диференціального рівняння в межові умови і одержуємо систему рівнянь

$$
\begin{cases} A\sin\nu l + B\cos\nu l = 0,\\ A\cos\nu l + B\sin\nu l = 0 \end{cases} \tag{0.3}
$$

відносно A і B. Для того, щоб вона мала ненульовий розв'язок, необхідно і достатньо, щоб її визначник дорівнював нулю, тобто справджувалась рівність $\cos 2\nu l = 0$. З неї знаходимо власні числа ν_n^2:

$$
\nu_n = \frac{(2n+1)\pi}{4l}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{0.4}
$$

При таких ν рівняння системи (0.3) пропорційні.