УДК 519.9

Андрій Я. Жугаєвич[1]

Локальність функції Гріна кінетичного рівняння на гратці

Показано, що функція Гріна кінетичного рівняння на гратці (перехідна імовірність однорідного марковського ланцюга) спадає з відстанню експоненційно для просторових граток і факторіально для граток типу інформаційних мереж.

Ключові слова: марковський ланцюг, випадкове блукання, кінетичне рівняння.

Andriy Y. Zhugayevych[1]

Locality of the Green function of kinetic equation on a lattice

It is shown that the Green function of the kinetic equation on a lattice (the transition probability of the homogeneous Markov chain) decay with distance exponentially for spatial lattices and as factorial for information network lattices.

Key Words: Markov chain, random walks, kinetic equation.

[1] *E-mail: zhugayevych@mail.univ.kiev.ua*

Розглянемо наступне кінетичне рівняння на гратці X (пряме рівняння Колмогорова для однорідного марковського ланцюга [1]):

$$\dot{p}_x = \sum_{y \in X} \left(p_y w_{yx} - p_x w_{xy} \right), \qquad (1)$$

де p_x – імовірність знаходження частинки в точці x у момент часу t (залежність від t в позначеннях не відображаємо), w_{xy} – інтенсивність переходів частинки з точки x у точку y (природно, вони невід'ємні). Це рівняння може описувати, наприклад, стрибковий транспорт частинок між локалізованими станами (див. наприклад [2]). Кожний обмежений розв'язок рівняння (1) може бути представлений через функцію Гріна (яка є перехідною імовірністю марковського ланцюга) у вигляді $p_x(t) = \sum_{y \in X} p_y(0) G_{yx}(t)$. Рівняння (1) можна також записати в операторному вигляді:

$$\dot{p} = pA, \text{ де } A_{yx} = -\delta_{yx} \sum_{z \in X} w_{xz} + w_{yx}.$$

Для реальних фізичних систем інтенсивності переходів w швидко спадають з відстанню. Наслідком цього є локальність (спадання з відстанню) функції Гріна G, яку можна довести у двох важливих випадках, практично вичерпуючих можливі фізичні застосування. По-перше, це кінетичне рівняння на просторових гратках, тобто задачі стрибкового руху частинки по скінченновимірній гратці з експоненційно спадаючими з відстанню інтенсивностями переходів (експоненційне спадання інтенсивностей тунелювання є відомим фактом квантової механіки).

Другий випадок це системи типу інформаційних мереж, коли кожна точка зв'язана ненульовими інтенсивностями переходу лише зі скінченною множиною інших точок, зокрема до цього класу належить класична задача випадкового блукання. Для самого поняття локальності нам, очевидно, потрібна метрика на *X*. В першому випадку – це переважно метрика індукована обхопним простором $\mathbf{R}^d$, у другому метрику ми визначимо самі, природно взявши мінімальний шлях з однієї точки в іншу. Як буде показано нижче, ми отримаємо відповідно експоненційне і факторіальне спадання функції Гріна з відстанню. Перейдемо до конкретних міркувань. Почнемо з просторових граток.

Нехай на гратці *X* задано метрику ρ, причому відносно метрики гратка скінченновимірна і не містить точок згущення, що можна записати у вигляді нерівності $N(x,r) \le N_0 + cr^d$, де $N(x,r)$ – кількість точок у кулі радіуса r з центром у точці x, а N_0, c і d (розмірність гратки) – фіксовані додатні числа. Нехай тепер коефіцієнти рівняння (1) такі, що $A_{xy} \le be^{-a\rho(x,y)}$, де a і b – фіксовані додатні числа. Тоді функція Гріна рівняння (1) спадає експоненційно з відстанню. Конкретну оцінку одержимо нижче.

Для доведення скористаємося рядом Тейлора для функції Гріна:

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}. \tag{2}$$

Оцінимо A^n (суми по $z_i \in X, i = \overline{1,n}$, які позначатимемо просто Σ_z, скінченні, тому переставляємо інтегрування і підсумовування без коментарів):

$$\left(A^n\right)_{yx} \equiv \sum_z A_{yz_1} \cdots A_{z_n x} \le b^n \sum_z \exp\left\{-a\left(\rho(y,z_1)+\ldots+\rho(z_n,x)\right)\right\}$$

$$= ab^n \sum_z \int_{\rho(y,z_1)+\ldots+\rho(z_n,x)}^{\infty} e^{-ar} dr = ab^n \int_{\rho(y,x)}^{\infty} e^{-ar} \sum_z \chi\left\{\rho(y,z_1)+\ldots+\rho(z_n,x) \le r\right\} dr.$$

В останньому перетворенні ми врахували, що за нерівністю трикутника $\rho(y,z_1)+\ldots+\rho(z_n,x) \ge \rho(x,y)$. Отже, задача зводиться до того, щоб оцінити суму в останньому виразі,

$$\sum_z \chi\left\{\rho(y,z_1)+\ldots+\rho(z_n,x) \le r\right\} \le \sum_z \chi\left\{\rho(y,z_1)+\ldots+\rho(z_{n-1},z_n) \le r\right\} \le \Phi_n(r),$$

де $\Phi_n(r)$ – деяка функція, для якої ми виведемо рекурентне співвідношення.

$$\sum_z \chi\left\{\rho(y,z_1)+\ldots+\rho(z_n,x) \le r\right\} = \sum_z \chi\left\{\rho(z_{n-1},z_n) \le r - \rho(y,z_1) - \ldots - \rho(z_{n-2},z_{n-1})\right\}$$

$$\le \sum_z \left(N_0 \chi\left\{\rho(y,z_1)+\ldots+\rho(z_{n-2},z_{n-1}) \le r\right\} + \int_0^r dcr_1^{d-1} \chi\left\{\rho(y,z_1)+\ldots+\rho(z_{n-2},z_{n-1}) \le r - r_1\right\} dr_1 \right)$$

$$\le N_0 \Phi_{n-1}(r) + \int_0^r dcr_1^{d-1} \Phi_{n-1}(r_1) dr_1 = \Phi_n(r).$$

Розв'язок цього рекурентного рівняння такий:

$$\Phi_n(r)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}N_0^{n-k}\frac{\Gamma^k(d+1)}{\Gamma(dk+1)}c^k r^{dk}.$$

Підставляючи все в ряд Тейлора функції Гріна, дістанемо

$$G_{yx}\le a\int_{\rho(x,y)}^{\infty}e^{-ar}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{t^n b^n N_0^{n-k}\Gamma^k(d+1)c^k r^{dk}}{(n-k)!k!\Gamma(dk+1)}dr,$$

причому ряди степеневі з нескінченним радіусом збіжності (ми явно їх підсумуємо), тому винесення інтегрування за знак суми коректне. Зробивши заміну індекса $n=k+m$, одержимо

$$G_{yx}\le a\int_{\rho(x,y)}^{\infty}e^{-ar}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m b^m N_0^m}{m!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k b^k N_0^k\Gamma^k(d+1)c^k r^{dk}}{k!\Gamma(dk+1)}dr.$$

Перший ряд дає експоненту, а другий оцінимо, використовуючи такі нерівності [3]:

$$\Gamma(dk+1)\Gamma(k+1)>\sqrt{2\pi\frac{d}{d+1}}\left(\frac{d^d}{(d+1)^{d+1}}\right)^k\Gamma((d+1)k+1),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!\Gamma(dk+1)}<\sqrt{\frac{1}{2\pi}\frac{d+1}{d}}\exp\left(\tilde{z}^{\frac{1}{d+1}}\right),\ \tilde{z}\equiv\frac{(d+1)^{d+1}}{d^d}z.$$

Отже,

$$G_{yx}\le ae^{tbN_0}\int_{\rho(x,y)}^{\infty}\exp\left(\frac{d+1}{d}\left(bcd\Gamma(d+1)t\right)^{\frac{1}{d+1}}r^{\frac{d}{d+1}}-ar\right)dr. \qquad (3)$$

Збіжність інтеграла очевидна, його асимптотика при великих $\rho(x,y)$ визначається методом Лапласа [4]. Максимум показника експоненти буде при

$$r_f=\frac{bcd\Gamma(d+1)}{a^{d+1}}t, \qquad (4)$$

цю величину природно назвати дифузійним фронтом. Для малих часів, коли $r_f<\rho(x,y)$ (тобто дифузійний фронт ще не дійшов з y в x), асимптотика інтеграла визначається значенням підінтегральної функції в нижній межі, що дає експоненційне спадання з показником a. При наближенні r_f до величини $\left(\frac{d}{d+1}\right)^{d+1}\rho(x,y)$ показник експоненти наближається до нуля, і оцінка втрачає смисл.

Підсумовуючи, функція Гріна спадає експоненційно за межами дифузійного фронту, який рухається з постійною швидкістю на відміну від середньоквадратичного зміщення, яке зростає значно повільніше, пропорційно кореню з часу.

У випадку інформаційних мереж природа локальності функції Гріна зовсім інакша. Нехай оператор A_{yx} для кожного фіксованого y відмінний від нуля лише для скінченного числа точок x, причому рівномірно по y (у цій умові x і y можна поміняти місцями). Назвемо точки x і y з'єднаними, якщо A_{yx} або A_{xy} відмінне від нуля. Шляхом з y в x довжини n природно назвати всяку впорядковану множину сусідньо з'єднаних точок $\{y,z_1,z_2,\ldots,z_{n-1},x\}$. Тепер ми можемо ввести метрику $\rho(x,y)$ на X як довжину мінімального шляху з y в x (аксіоми метрики, очевидно, виконуються), так що, наприклад, відстань між з'єднаними точками дорівнює одиниці.

Основний результат полягає в тому, що функція Гріна в такій метриці факторіально спадає з відстанню.

Для доведення знову скористаємося рядом Тейлора (2). Врахуємо, що $\left(A^n\right)_{yx} \le a^n\left(N+1\right)^{n-1}$, де $a=\sup_{x,y}\left|A_{yx}\right|$, а N – максимальна кількість сусідів (за умовою існує). Крім того, $(A^n)_{yx}=0$, якщо $n<\rho(x,y)$, бачимо, що розвинення функції а отже розвинення функції G_{yx} починається з члену порядку $n=\rho(x,y)$. Оцінивши залишок ряду, дістанемо

$$G_{yx}(t)=\frac{\left(a(N+1)t\right)^{\rho(x,y)}}{\rho(x,y)!}\frac{e^{a(N+1)t}}{N+1}, \tag{5}$$

тобто функція Гріна спадає з відстанню факторіально. Як і в попередньому випадку, оцінка змістовна за межами дифузійного фронту, який тепер дорівнює

$$r_f=ea(N+1)t. \tag{6}$$

Отже, якщо в першому випадку ключовим моментом була скінченновимірність гратки, то в другому – скінченне число "сусідніх" точок.

Автор виражає подяку канд. фіз.-мат. наук Юрачківському А. П. за вказані ним неточності і шляхи їх подолання.

Література

1. Чжун К.-Л., Однородные цепи Маркова. – М.: Мир, 1964.
2. Haus J.W., Kehr K.W., Phys. Rep. **150**, 263 (1987).
3. Бейтмен Г., Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Том 1. – М.: Наука, 1965.
4. Федорюк М.В., Метод перевала. – М.: Наука, 1977.

Надійшла до редакції 24.04.2002