УДК 517

Юрачківський А. П., Жугаєвич А. Я.

Наближене обчислювання операторних півгруп методом збурювання генераторів

(Представлено членом-кореспондентом НАН України Горбачуком М. Л.)

Let Ω be an operator semigroup with generator A in a sequentially complete locally convex topological vector space E. For a semigroup with generator $A+D$, where D is a bounded linear operator on E, two integral equations are derived. A theorem on continuous dependence of a semigroup on its generator is proved. An application to random walk on $\mathbb{Z}$ is given.

Нехай Ω, Ω' – операторні півгрупи[1] [1, 2, 3] з генераторами A, A' відповідно і $D = A' - A$. Відомо [3] (с.77), що за належних припущень

$$\Omega' = \Omega + \Omega D * \Omega', \tag{1}$$
$$\Omega' = \Omega + \Omega' * D\Omega, \tag{2}$$

де символ $*$ означає згортку, у даному разі операторних функцій. Ці рівності назвемо *формулами збурення*.

У статті ми доводимо формули збурення за загальніших ніж у [3] припущень, спираючись на них, доводимо неперервну залежність у сильній топології півгрупи від генератора і застосовуємо це до наближеного обчислювання півгруп операторів у координатних просторах. Ідея застосування полягає в тому, що рівності (1) і (2) розглядаються як рівняння відносно невідомої операторної функції Ω'.

Важливим прикладом півгрупи є перехідна функція однорідного марковського процесу. Для цього випадку формули збурення відкрив і систематично використовує Портенко [4, 5]. Там же можна знайти узагальнення цих формул для неоднорідного процесу, перехідна функція якого утворює двопараметричну напівгрупу.

Позначимо простір, на якому діють півгрупи, через E. Нижче A_1 означає те саме, що A', A_0 – те саме, що A (аналогічно Ω_1 і Ω_0). Зробимо звичайні в теорії операторних півгруп припущення: 1) E – повний локально опуклий лінійний топологічний простір;

2) A_i ($i \in \{0, 1\}$) – щільно заданий лінійний оператор такий, що для деякого $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ резольвента $R_i(\lambda_0) = (\lambda_0 \mathbf{1} - A_i)^{-1}$ визначена на всьому E і сім'я $\{(\lambda R_i(\lambda))^m : \lambda \geq \lambda_0, m \in \mathbb{N}\}$ одностайно неперервна.

Нагадаємо, що одностайна неперервність сім'ї $\{f_\theta : \theta \in \Theta\}$ відображень з E в E означає наступне ([2], с.324): для будь-якої неперервної на E напівнорми $\|\cdot\|$ існує неперервна напівнорма $\|\cdot\|'$ така, що для всіх $\theta \in \Theta$ і $q \in E$ $\|f_\theta(q)\| \leq \|q\|'$.

[1] Півгрупою ми називаємо напівгрупу, спараметризовану невід'ємним дійсним числом, тобто гомоморфний образ напівгрупи $\mathbb{R}_+$.

Теорема 1. Нехай виконано умови 1), 2) і оператор $D = A_1 - A_0$ визначений і обмежений на всьому E. Тоді для будь-якого $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \Omega_1(t) &= \Omega_0(t) + \int_0^t \Omega_0(t-\tau) D \Omega_1(\tau) d\tau, && (3) \\ \Omega_1(t) &= \Omega_0(t) + \int_0^t \Omega_1(t-\tau) D \Omega_0(\tau) d\tau. && (4) \end{aligned}$$

Доведення. Оскільки D всюди визначений, то A_0 і A_1 мають однакову область визначення, яку ми позначимо S.

Нехай спочатку в умові 2) $\lambda_0 \leq 0$. Тоді теорема Гілле–Йосиди ([2], с.339) стверджує, що оператори A_i породжують одностайно неперервні півгрупи Ω_i, залежність Ω_i від t сильно неперервна і $R_i(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Omega_i(t) dt$. Звідси випливає, що виконання рівності (3) для всіх $t \geq 0$ рівносильне виконанню рівності

$$R_1(\lambda) = R_0(\lambda) + R_0(\lambda) D R_1(\lambda) \tag{5}$$

для всіх $\lambda \geq \lambda_0$. Щоб довести останню, зауважимо, що за означенням резольвенти $A_i R_i(\lambda) = \lambda R_i(\lambda) - \mathbf{1} = R_i(\lambda) A_i$ на S, так що $R_0 D R_1 \equiv R_0 A_1 R_1 - R_0 A_0 R_1 = R_0(\lambda R_1 - \mathbf{1}) - (\lambda R_0 - \mathbf{1}) R_1$. Цим рівність (5) встановлено для звужень обох її частин на S. Припущення 2) дозволяє продовжити її на E.

Якщо ж $\lambda_0 > 0$, то, застосувавши попередні міркування до операторів $\tilde{A}_i = A_i - \lambda_0 \mathbf{1}$, встановлюємо (3) для $\tilde{\Omega}_i$, після чого залишається зауважити, що, очевидно, $\tilde{\Omega}_i(t) = e^{-\lambda_0 t} \Omega_i(t)$.

Співвідношення (4) виводимо з (3), помінявши ролями A_0 і A_1.□

Перше застосування формул збурення — теорема про неперервну залежність у сильній топології півгрупи від генератора. Від теореми Троттера–Като ([2], с.370, [6], с.623) вона відрізняється тим, що умова збіжності послідовності півгруп формулюється в термінах самих генераторів, а не резольвент.

Теорема 2. Припустимо, що: простір E задовольняє умову 1), а оператори $A_0, A_1, A_2, \ldots$ – умову 2), де i пробігає $\mathbb{Z}_+$; для кожного n оператор $B_n \equiv A_n - A$ визначений і обмежений на всьому E; для будь-якого $q \in E$

$$B_n q \to 0 \tag{6}$$

при $n \to \infty$. Тоді для довільних $t > 0$, $q \in E$ і будь-якої напівнорми $\|\cdot\|$ з породжуючої топологію простору E системи напівнорм

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{s \leq t} \|\Omega_n(s) q - \Omega(s) q\| = 0.$$

Доведення. З (6) за теоремою Банаха–Штейнгауза ([7], теор. 2.6) виводимо, що

$$\sup_n \|B_n\| < \infty. \tag{7}$$

Позначимо $g_n = \Omega_n q$, $w_n = \|\Omega_n\|$, $W_n(t) = \sup_{s \leq t} w_n(s)$ (аналогічно g, w, W), $V_n = \|B_n\| W_n$. Замінивши у (2) Ω' на Ω_n і D на B_n і скориставшись властивостями напівнорми, дістанемо

$$w_n(s) \leq w(s) + V_n(s) \int_0^s w_n(\tau) d\tau, \tag{8}$$

$$\sup_{s \leq t} \|g_n(s) - g(s)\| \leq W_n(t) \int_0^t \|B_n g(\tau)\| d\tau. \tag{9}$$

Проітерувавши нерівність (8) один раз, матимемо

$$\begin{aligned} w_n(s) &\leq w(s) + V_n(s) \int_0^s \left(w(\tau) + V_n(\tau) \int_0^\tau w_n(p) dp \right) d\tau \\ &\leq w(s) + V_n(s) \int_0^s w(\tau) d\tau + V_n(s)^2 \int_0^s (s-p) w_n(p) dp. \end{aligned}$$

Продовживши ітерування, у границі одержимо

$$w_n(s) \leq w(s) + V_n(s) \int_0^s e^{V_n(s)(s-\tau)} w(\tau) d\tau,$$

звідки

$$W_n(t) \leq W(t) e^{\|B_n\| W(t)}.$$

Остання нерівність разом із (7) показує, що $\sup_n W_n(t) < \infty$. Тепер твердження теореми виводимо з (9) і (6), спираючись на теорему про мажоровану збіжність, застосовну завдяки (7).$\square$

Загальна схема застосування теорем 1 і 2 така. Припустимо, що півгрупа з генератором A_0 обчислюється в явному вигляді (у нескінченновимірних просторах це ситуація рідкісна, але можлива — нетривіальний приклад наведено нижче) і існує сильно збіжна до генератора A послідовність $(A_n, n \in \mathbb{N})$ генераторів така, що для кожного n оператори $B_n = A_n - A$ і $D_n = A_n - A_0$ (а значить і $A - A_0$) скрізь визначені і неперервні. Якщо при цьому оператори D_n влаштовані достатньо просто (у якомусь розумінні простіше ніж $A - A_0$), то розв'язування рівняння (3) або (4) може виявитись посильною задачею, що проілюстровано нижче. Це дає змогу для будь-якого n явно обчислити півгрупу Ω_n. Теорема 2 стверджує, що при достатньо великому n ми одержимо таким чином задовільну апроксимацію півгрупи Ω. На жаль, теорема (як і згаданий вище результат Троттера–Като) не дає швидкості збіжності, відтак і точного рецепту вибору n. Тому в застосуваннях доцільно обчислювати не одну півгрупу, а якийсь відрізок послідовності (Ω_n). У такому разі на n-му кроці простіше збурювати не A, а A_{n-1}, тобто покладати $D_n = A_n - A_{n-1}$.

Сконкретизуємо одержані результати для лінійних топологічних просторів числових послідовностей на скінченній або зліченній множині X (координатних просторів). Нехай E якийсь координатний простір, E' – спряжений до нього. Ми позначаємо однаково лінійний неперервний оператор A на E і спряжений до нього оператор на E', розрізняючи їх за позицією аргументу: праворуч від A в першому випадку і ліворуч у другому. Якщо E' складається не тільки з числових послідовностей, але підпростір $E'_0 \equiv E' \cap \mathbb{R}^X$ інваріантний відносно дії спряженого оператора, то останній розглядаємо саме на цьому, координатному, звуженні спряженого простору. Тоді оператор A і спряжений до нього обидва задаються одною функцією на X^2 (своїм *координатним зображенням*):

$$
\begin{aligned}
(Aq)(x) &= \sum_y A(x,y)q(y),\ q \in E, \\
(pA)(y) &= \sum_x p(x)A(x,y),\ p \in E_0'.
\end{aligned}
$$

У термінології диференціальних рівнянь породжена оператором A півгрупа Ω – це фундаментальний оператор, або матрицант, системи диференціальних рівнянь для числових функцій $q(x,\cdot)$

$$\dot q(x,t) = \sum_y A(x,y)q(y,t),\ x \in X, \tag{10}$$

рівносильної одному рівнянню

$$\dot q = Aq \tag{11}$$

для $\mathbb{R}^X$-значної функції.

Знайдемо координатне зображення фундаментального оператора у випадку, коли $E = l_1(X)$ (вибір простору пояснимо нижче) і A обмежений, тобто,

$$\|A\| \equiv \sup_y \sum_x |A(x,y)| < \infty. \tag{12}$$

Очевидно, відповідаючий початковій умові $q(0) = q_0 \in l_1$ розв'язок рівняння (11) – l_1-значна функція і

$$\|q(t)\|_1 \le \|q_0\|_1 e^{\|A\|t}, \tag{13}$$

де $\|\cdot\|_1$ – норма в просторі l_1.

Позначимо $G(\cdot,y,\cdot)$ розв'язок системи (10) із залежною від параметра y початковою умовою

$$G(x,y,0) = \delta(x,y) \tag{14}$$

(δ – функція Кронекера). Згідно з (11) і (13) $\sup_y \sum_x |\dot G(x,y,t)| \le \|A\| e^{\|A\|t}$. Це спільно з (12) означає, що для будь-якого $q_0 \in l_1$ ряд $\sum_y G(x,y,t)q_0(y)$ можна почленно диференціювати. Тоді для його суми $q(x,t)$ маємо

$$\dot q(x,t) = \sum_y \dot G(x,y,t)q_0(y) = \sum_y \sum_\xi A(x,\xi)G(\xi,y,t)q_0(y).$$

Змінивши порядок підсумовування, пересвідчуємося, що функції $q(x,\cdot)$ задовольняють систему рівнянь (10). Це разом з очевидною рівністю $q(x,0) = q_0(x)$ показує, що $G(\cdot,\cdot,t)$ є координатне зображення оператора $\Omega(t)$. Ми позначили його інакше, ніж сам оператор, тому що систему (10) можна розглядати як одне диференціально-різницеве рівняння для $q(\cdot,\cdot)$, а тоді G природно інтерпретувати як функцію Гріна.

Аналогічно переконуємося, що $G(x,\cdot,\cdot)$ є розв'язок двоїстої до (10) системи

$$\dot p(y,t) = \sum_x p(x,t)A(x,y),\ y \in X, \tag{15}$$

відповідаючий залежній від параметра x початковій умові (14).

Вибір координатного простору може диктуватися сторонніми для функціонального аналізу міркуваннями, як математичними, так і фізичними. Наприклад, у теорії ймовірностей диференціальним рівнянням півгрупи $\dot{\Omega} = A\Omega$, $\dot{\Omega} = \Omega A$ відповідають зворотне і пряме рівняння Колмогорова для матриці перехідних імовірностей однорідного ланцюга Маркова. У цьому випадку за E природно взяти $l_\infty(X)$, де X – фазовий простір ланцюга. Тоді спряжений простір E' має своїм підпростором l_1 і $E'_0 = l_1$. Такий вибір простору разом із додатковими припущеннями про A дозволяє інтерпретувати розв'язок системи (15) як одновимірний розподіл ланцюга. У статистичній же фізиці система (15) називається (знову ж таки за певних припущень про A) кінетичним рівнянням і p має фізичний смисл концентрації (густини). Від неї природно вимагати обмеженості, але не сумовності. У цьому випадку E слід вибрати так, щоб $E'_0 = l_\infty$, отже, можна взяти $E = l_1$ (і тоді $E'_0 = E'$). Дальший виклад ведемо саме для цих просторів.

Позначивши

$$F(x,y) = \sum_\eta G(x,\eta)D(\eta,y), \tag{16}$$

$$H(x,y) = \sum_\xi D(x,\xi)G(\xi,y), \tag{17}$$

можемо переписати рівності (1) і (2) в координатній формі

$$G'(x,y) = G(x,y) + \sum_\xi F(x,\xi) * G'(\xi,y), \tag{18}$$

$$G'(x,y) = G(x,y) + \sum_\eta G'(x,\eta) * H(\eta,y). \tag{19}$$

Це зліченні системи інтегральних рівнянь відносно функцій $G(x,y)$ змінної t, яку в позначеннях випускаємо. У загальному випадку вони не простіші за (10) і (15). Але якщо оператор D або спряжений до нього скінченновимірний, то розв'язування однієї з них зводиться до знаходження резольвенти скінченної системи інтегральних рівнянь. Справді, позначимо $\Xi_1 = \{\eta : \exists\xi\ D(\xi,\eta) \neq 0\}$, $\Xi_2 = \{\xi : \exists\eta\ D(\xi,\eta) \neq 0\}$, так що $F(x,\eta) = 0$ при $\eta \notin \Xi_1$, $H(\xi,y) = 0$ при $\xi \notin \Xi_2$. Обмежимо в (18) пробіг x множиною Ξ_1, а в (19) пробіг y множиною Ξ_2. Тоді для кожного y (18) є система рівнянь відносно функцій $G'(x,y),\ x \in \Xi_1$, змінної t; для кожного x (19) є система рівнянь відносно $G'(x,y),\ y \in \Xi_2$. Ядра рівнянь, а з ними й резольвенти, не залежать у першому випадку від y, у другому від x. Знайшовши одну з двох резольвент, виражаємо через неї ті функції, які входять у систему, після чого рівність (18) або (19) перетворюється на явну формулу для решти $G'(x,y)$.

Ідея застосування формул збурення полягає в тому, що за теоремою 2 розв'язок будь-якої нескінченної системи диференціальних рівнянь (10) з обмеженим A можна як завгодно точно наблизити розв'язком її скінченної підсистеми. Якщо ж оператор A необмежений, але ми можемо розв'язати систему

$$\dot{q}_0(x,t) = \sum_y A_0(x,y)q_0(y,t),\ x \in X, \tag{20}$$

з будь-яким оператором A_0 таким, що оператор $A - A_0$ обмежений, і крім того A і A_0 задовольняють умову 2), то розв'язок системи (10) можна як завгодно точно наблизити розв'язком системи, фінітно збуреної від (20). При цьому, як зазначалося вище, завдяки фінітності збурення система ефективно скінченна. Точність наближення можна оцінити за формулами збурення.

Для прикладу розглянемо просторово неоднорідне випадкове блукання на $\mathbb{Z}$. Пряме рівняння Колмогорова для імовірності $p(y,t)$ знаходження блукаючої частинки в момент часу t в точці y має вигляд (15) з оператором A, ненульовими компонентами якого будуть

$$A(x,x+1) = \lambda(x),\ A(x,x-1) = \mu(x),\ A(x,x) = -\lambda(x) - \mu(x),$$

де $\lambda(x)$ – інтенсивність переходів з точки x у точку $x+1$, а $\mu(x)$ – з точки x у точку $x-1$, причому λ і μ обмежені в сукупності. Для оператора A_0, який відповідає просторово однорідному блуканню з усіма $\lambda(x) = \mu(x) = 1$, перехідна імовірність (функція Гріна) відома ([8], с.76):

$$G_0(x,y,t) = e^{-2t} I_{|x-y|}(2t),$$

де I_n – модифікована функція Бесселя порядку n. Отже, перехідну імовірність задачі, для якої інтенсивності переходів відмінні від 1 лише на скінченній множині $\Xi \subset \mathbb{Z}$, можна обчислити точно. Для цього ми розв'язуємо систему (18), яка при обмеженні $x \in \Xi$ в лапласових перетворах стає скінченною системою лінійних рівнянь. Ця ж формула (18) дасть відповідь у лапласових перетворах для будь-яких $x, y \in \mathbb{Z}$. Оригінал, тобто функцію $G'(x,y,t)$, шукаємо у вигляді скінченної суми бесселевих функцій аргументу $2t$ різних порядків не вище $|x-y|$ (знаходження коефіцієнтів цієї суми алгоритмізовне).

[1] *Хилле Э., Филлипс Р. С.* Функциональный анализ и полугруппы.–М.: ИЛ, 1962.–829 с.

[2] *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.

[3] *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. – New York: Springer Verlag, 1983. – 279 p.

[4] *Портенко Н. И.* Обобщенные диффузионные процесы. – Киев: Наукова думка, 1982. – 208 с.

[5] *Портенко М. І.* Процеси дифузії в середовищах з мембранами. – Київ: Ін-т математики, 1995. – 198 с.

[6] *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.

[7] *Рудин У.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975. – 443 с.

[8] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. – М.: Наука, 1984. – 738 с.

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка

Отримано 30.10.2002

Доповіді Національної академії наук України, 2003, № 11, с. 27–32