

Задачі до курсу статистичної фізики

Андрій Жугаєвич (zhugayevych@univ.kiev.ua)

7 лютого 2007 р.

§1. Аксиоматика і обґрунтування термодинаміки

1. (20) Показати, що з оборотності адіабатичних процесів в термічно однорідній системі випливає, що $\delta Q = T dS$.
2. (10) Показати, що для термічно неоднорідної системи адіабатичні процеси загалом необоротні, розглянувши приклад ідеального газу, розділеного на дві частини адіабатичною жорсткою перегородкою. Зафіксувавши об'єм V_2 , розглянути круговий адіабатичний процес, при якому по черговому фіксується T_1 і V_1 .
3. (5) Показати, що для термічно неоднорідної системи не існує функції стану σ такої, що $\delta Q = \lambda d\sigma$, розглянувши приклад газу, розділеного на дві частини адіабатичною жорсткою перегородкою, у змінних T_1, S_1, T_2, S_2 .
4. (5) Показати, що адіабатична недосяжність нуля температури еквівалентна тому, що $S(T = 0)$ не залежить ні від яких термодинамічних величин за умови, що вона скінченна.
5. (5) Показати, що з рівності $S(T = 0) = 0$ випливає, що всі теплоємності C_x і термічні коефіцієнти $(\partial x / \partial T)_X$, де x, X – пара спряжених термодинамічних величин, прямують до нуля при $T \rightarrow 0$.

§2. Рівноважна термодинаміка

**Тотожності*

1. (3) Довести формули: а) $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_z / \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z$; б) $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$.
2. (3) Записати $C_p - C_V$ у змінних: а) (T, V) ; б) (T, p) ; в) (T, V, μ) .
3. (3) Записати $(\partial T / \partial p)_H$ у змінних (T, V) .
4. (3-5) Довести тотожності: а) $n = (\partial p / \partial \mu)_T$; б) $E = -T^2 (\partial [F/T] / \partial T)_V$; в) $C_V = (\partial E / \partial T)_V$; г) $C_p = (\partial H / \partial T)_p$; д) $C_p / C_V = (\partial V / \partial p)_T / (\partial V / \partial p)_S$; е) $C_p - C_V = (\partial p / \partial T)_V [V - (\partial H / \partial p)_T]$.
5. (5) Відомо, що вода в інтервалі температур від 0 до 4 °C стискається при нагріванні. Показати, що в цьому ж температурному інтервалі вода охолоджується при адіабатичному стисненні. (Г93)

**Диференціювання*

6. (10) Довести, що рівняння політропи $C_V = C$ є розв'язком рівняння $dT / dV = T(\partial p / \partial T)_V / (C - C_V)$. Знайти таким чином рівняння політропи газу ван-дер-Ваальса.
7. (5-8) Знайти p, S, E, C_V і $C_p - C_V$ для системи, вільна енергія якої $F(T, V)$ дорівнює: а) $NT \ln \frac{n}{T}$; б) $N \left(T \ln \frac{n}{T(1-bn)} - an \right)$; в) $NT \ln \frac{An}{T^{3/2}}$.
8. (5) Знайти T, p, C_V і $C_p - C_V$, якщо $S(E, V) = N \ln(E/V)$.
9. (5) Знайти V, S, E, C_p і $C_p - C_V$, якщо $\Phi(T, p) = N \ln(p/T)$.
10. (5) Вивести формулу для C_μ , аналогічну формулі $C_V = (\partial E / \partial T)_V$.
11. (5) Обчислити C_μ для ідеального газу.
12. (8) Знайти і проаналізувати $C_p - C_V$ і $(\partial T / \partial p)_H$ для газу ван-дер-Ваальса.
13. (10) Яка кількість теплоти потрібна для ізобаричного розширення газу ван-дер-Ваальса? Для спрощення розглянути одноатомний газ. (Г84)

**Інтегрування*

14. (4) Одержати умови сумісності рівняння стану і теплоємностей C_V і C_p .
15. (5) Перевіривши умову сумісності, знайти рівняння адіабати, якщо: а) $p = p_0 + \alpha T - \beta V$ і $C_V = \text{const}$; б) $V = V_0 + \alpha T - \beta p$ і $C_p = \text{const}$.
16. (15) Класичний ідеальний газ означається парою рівнянь $p = nT$ і $C_V = C_V(T)$ (не залежить від об'єму). Вивести звідси, що його вільна енергія має вигляд $F = NT \ln \frac{n}{f(T)}$.
17. (10) Відновити $C_V - C_V^{\text{ideal}}$ і $F - F^{\text{ideal}}$ для газу з рівнянням стану: а) ван-дер-Ваальса; б) Дітерічі; в) Бертелло; г) Редліха-Квонга.

**Інші задачі*

18. (20) Знайти критичну точку, виразити через неї емпіричні параметри і записати приведені рівняння стану для газу з емпіричним рівнянням стану: а) ван-дер-Ваальса; б) Дітерічі; в) Бертелло; г) Редліха–Квонга.

§3. Нерівноважна термодинаміка

- (5) В умовах канонічного ансамблю знайти: а) $\langle \Delta S \Delta p \rangle$; б) $\langle \Delta S^2 \rangle$; в) $\langle \Delta p^2 \rangle$; г) $\langle \Delta T \Delta S \rangle$; д) $\langle \Delta p \Delta V \rangle$; е) $\langle \Delta T \Delta p \rangle$; є) $\langle \Delta S \Delta V \rangle$; ж) $\langle \Delta E^2 \rangle$; з) $\langle \Delta F^2 \rangle$; и) $\langle \Delta \Phi^2 \rangle$; і) $\langle \Delta H^2 \rangle$.
- (5) Знайти флуктуацію: а) положення маятника; б) заряду на конденсаторі; в) струму в катушці індуктивності.
- (5) Знайти границю чутливості: а) пружинних терезів; б) крутильних терезів.

§4. Обґрунтування статистичної фізики

- (10-20) Показати, що для ідеального газу $\langle \partial H / \partial V \rangle = -p$ в канонічному і мікроканонічному ансамблях.
- (10) Показати еквівалентність канонічного і мікроканонічного ансамблів в термодинамічній границі для ентропії ансамблю спінів у магнітному полі.
- (10-20) Показати еквівалентність канонічного і мікроканонічного ансамблів в термодинамічній границі для ентропії класичного і квантового осциляторів.
- (15) Показати еквівалентність канонічного і мікроканонічного розподілів в термодинамічній границі ансамблів для ентропії ідеального газу.
- (15) Знайти розподіл класичної системи на траєкторії у фазовому просторі і в конфігураційному. Порівнявши з мікроканонічним розподілом, з'ясувати як заповнюється фазовий простір траєкторіями.
- (5) Вивести мікроканонічний розподіл Гібса для одновимірного класичного осцилятора, розв'язавши рівняння руху.
- (4) Коли порушується мікроканонічний розподіл для фізичного маятника і чому?
- (5) Кулька падає з висоти h_0 . Знайти розподіл висоти кульки h при її випадковому вимірюванні (під час падіння).
- (5) Знайти розподіл кута відхилення математичного маятника ϕ при його випадковому вимірюванні.
- (10-15) Розглянемо термодинамічну систему N частинок. Нехай функція $M(N)$ задовольняє умови $M^{(k)}/M = O(1/N^k)$ при $N \rightarrow \infty$. Показати, що $\langle M(N) \rangle \approx M(\bar{N}) + \frac{\sigma^2}{2} \bar{N} M''(\bar{N})$, де $\sigma^2 \bar{N}$ – дисперсія числа частинок. Оцінити дисперсію величини M . Для яких фізичних величин можна застосувати одержані результати?
- (10) Вивести великий канонічний розподіл для виділеного підоб'єму класичного ідеального газу.

§5. Принципи статистичної фізики

- (10-20) Ідеальний газ N частинок займає об'єм V . Знайти розподіл числа частинок n у виділеному підоб'ємі v . Розглянути також термодинамічну границю у двох випадках: виділений об'єм мікроскопічний або макроскопічний.
- (3) Знайти величину флуктуацій енергії в канонічному ансамблі.
- (10) Знайти величину флуктуацій числа частинок і енергії у великому канонічному ансамблі.
- (15) Вивести теорему віріала для фізичної величини $\varphi(p, q)$:

$$\left\langle \varphi \frac{\partial H}{\partial p} \right\rangle = T \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right\rangle, \quad \left\langle \varphi \frac{\partial H}{\partial q} \right\rangle = T \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial q} \right\rangle.$$

Зокрема показати, що на кожен кінетичний ступінь вільності припадає енергія $T/2$. Розглянути також квантовий випадок.

- (15) Записати канонічний розподіл для ідеального газу при постійному тиску. Знайти рівняння стану і порівняти з випадком звичайного канонічного розподілу.
- (50) Класичний газ частинок, потенціал взаємодії між якими дорівнює $m\omega^2 r_{ij}^2/2$, знаходиться в гармонічній пастці з частотою $\sqrt{\eta}\omega$. Знайти статистичний інтеграл, парну функцію розподілу, термодинамічні функції, і дати пояснення.

§6. Ансамбль конфігураційно ізольованих систем

1. (3) Квантова система має два рівні енергії: основний невироджений з нульовою енергією і трикратно вироджений з енергією ϵ . Знайти середню енергію і теплоємність, дослідити залежність їх від температури.
2. (3) Знайти середню намагніченість спінів у магнітному полі.
3. (5) Система з невиродженим спектром $E_n = n\epsilon$, $n = \overline{0, L-1}$. Знайти енергію і теплоємність.
4. (5) Для системи зі спектром $E_n = n\epsilon$, $n \geq 0$, де всі рівні невироджені крім двократно виродженого рівня $n = 1$, дослідити залежність теплоємності від температури.
5. (30) Частинка в потенціальному ящику. Отримати при високих температурах рівняння стану ідеального газу.

**Осцилятор*

6. (5) Знайти енергію і теплоємність ансамблю осциляторів: а) класичних; б) квантових.
7. (5) Знайти середньоквадратичне відхилення осцилятора в термостаті: а) класичного; б) квантового.
8. (5-15) Знайти розподіл координат осцилятора в термостаті: а) класичного; б) квантового.
9. (5) Знайти вільну енергію і поляризованість осцилятора в зовнішньому однорідному полі.
10. (10) Дослідити вплив ангармонізму коливань на теплоємність класичного осцилятора.

**Ротатор і дзига*

11. (5) Знайти теплоємність класичного ротатора.
12. (15-45) Знайти першу квантову поправку до теплоємності ротатора. Розглянути також багатовимірний випадок.
13. (10) Вивести розподіл Больцмана для дзиги.
14. (10) Знайти теплоємність класичної дзиги.
15. (5) Записати статистичну суму дзиги: а) сферично симетричної; б) аксіально симетричної.

**Молекула*

16. (10) Знайти середній момент дипольної молекули у сталому однорідному електричному полі в класичному наближенні.
17. (10) Знайти діелектричну проникність ансамблю ізольованих молекул у класичному наближенні в малих полях. Оцінити також порядок нелінійного члена.
18. (20) Знайти діелектричну проникність ансамблю ізольованих недипольних молекул у класичному наближенні, тензор поляризованості яких аксіально симетричний. За яких умов ця задача має смисл і не зводиться до задачі 6.17? Яку групу симетрії може мати така молекула?
19. (15) Знайти коефіцієнт температурного розширення двоатомної молекули.

**Великий канонічний ансамбль*

20. (5) Система з одним рівнем ϵ у великому канонічному ансамблі. Знайти число частинок, енергію, теплоємність. Розглянути обидві статистики.
21. (10) Гіпотетичний атом з одною орбітальною. Дослідити залежність числа електронів від температури і хімічного потенціалу.

§7. Ідеальний класичний газ

1. (20) Знайти термодинамічні величини класичного ідеального релятивістського газу. Розглянути також ультрарелятивістський випадок.
2. (20) Знайти термодинамічні величини класичного ідеального газу у d -вимірному просторі зі спектром $\epsilon p^{d/\alpha}$.
3. (3) Для класичного газу знайти середню швидкість і найбільш імовірну швидкість, середню кінетичну енергію і найбільш імовірну кінетичну енергію.
4. (10) Вивести розподіл Максвелла з гіпотези про незалежність розподілів декартових компонент швидкості.
5. (10) Для класичного газу знайти розподіл відносної швидкості двох молекул.
6. (10) Знайти температурне розширення спектральних ліній випромінювання класичного нерелятивістського газу. При якій температурі півширина (корінь з дисперсії) лінії H_α (перехід $3 \rightarrow 2$ атома водню) становитиме 1 \AA .

7. (10) Порожній циліндр з повітрям в ньому герметично закрили і обертають з частотою Ω . Знайти різницю тисків повітря на бічній поверхні циліндра і приріст моменту інерції циліндра. Як швидко треба обертати циліндр, щоб різниця тисків склала 1 мм.рт.ст? Яке відношення відцентрової сили і сили тиску повітря на бічну стінку циліндра?
8. (5) Вивести барометричну формулу (зміну тиску з висотою). Якій різниці висот відповідає різниця тисків 1 мм.рт.ст?
9. (5) Знайти центр мас стовпа повітря висотою h в полі земного тяжіння. Дослідити граничні випадки.
10. (15-30) Обчислити тиск повітря (в атм.) на висоті 9 км з точністю не гірше 0.1% при лінійній залежності температури від висоти з градієнтом -6.5 К/км, якщо на рівні моря $T_0 = 15^\circ\text{C}$, $g_0 = 980.665$ см/с², $m = 28.9644m_u$ (модель стандартної атмосфери). Пояснити адекватність лінійної залежності температури від висоти.
11. (5) Обчислити хімічний потенціал повітря в стандартних умовах.
12. (5) Обчислити відношення довжини хвилі де Бройля до середньої відстані між молекулами повітря в стандартних умовах.

§8. Ідеальний квантовий газ

1. (5) Знайти повну кількість станів $\Gamma(\varepsilon)$ для частинки в заданому об'ємі, енергія якої залежить лише від модуля імпульсу.
2. (5-10) Знайти густину станів для: а) вільної частинки; б) частинки з тензорною масою; в) релятивістської частинки; г) ультрарелятивістської частинки; д) частинки в гармонічній пастці; е) частинки зі спектром $\varepsilon = cp^{d/\alpha}$ в d -вимірному просторі.
3. (15) Знайти квантову поправку до класичного рівняння стану і теплоємності ідеального газу.
4. (10) Оцінити $C_\mu - C_N$ для виродженого фермі-газу.
5. (5-30) Дослідити ідеальний ультрарелятивістський квантовий газ.
6. (20-80) Дослідити ідеальний квантовий газ зі степеневим спектром $\varepsilon = cp^{d/\alpha}$ в d -вимірному просторі.
7. (5-10) Знайти рівняння стану і теплоємність виродженого: а) релятивістського газу електронів; б) ультрарелятивістського газу електронів;
8. (5) Оцінити фермі-енергію для алюмінію.
9. (20) Дослідити бозе-конденсацію атомів лужних металів у гармонічній пастці. Оцінити температуру бозе-конденсації для $\bar{\omega} = 1$ kHz і $N = 1000$ атомів.
10. (10) Оцінити концентрацію електрон-позитронних пар при кімнатній температурі. При якій температурі концентрація сягне 1 м⁻³?
11. (5) Записати рівняння на хімічний потенціал електронів у напівпровіднику з домішками обох типів.
12. (10-15) Для легованого невиродженого напівпровідника з параболічним законом дисперсії записати рівняння на хімічний потенціал, а також знайти умови, коли він буде чистим напівпровідником, скомпенсованим, n -типу, p -типу. Довести, що добуток np не залежить від наявності домішок.
13. (5-30) Для легованого невиродженого напівпровідника з параболічним законом дисперсії знайти залежність хімічного потенціалу і концентрації носіїв від температури і концентрації домішок у наступних випадках: а) чистий напівпровідник; б) напівпровідник з донорною домішкою; в) напівпровідник з акцепторною домішкою. Розглянути також ефект наявності домішок обох типів. Для прикладу розглянути Si з домішками P і Al. Побудувати графік залежності хімічного потенціалу і концентрації носіїв від концентрації фосфору при $n_{\text{Al}} = 0$ і кімнатній температурі, а також від температури при $n_{\text{P}} = 10^{18}$ см⁻³ і $n_{\text{Al}} = 10^{16}$ см⁻³.
14. (5) Знайти теплоємність електронів у власному невиродженому напівпровіднику з параболічним законом дисперсії.
15. (3) Для розподілу Планка з $T = 1000$ К знайти: а) повну густину енергії і концентрацію фотонів; б) середню і найбільш імовірну енергію квантів; в) довжини хвиль, які відповідають максимуму $dE/d\lambda$ і $dE/d\omega$.
16. (5) Узагальнити формулу Планка для теплового випромінювання в середовищі з дисперсією.
17. (50) Для електромагнітного поля в прямокутному металічному резонаторі знайти середню енергію і середньоквадратичну амплітуду електричного та магнітного полів в кожній моді. Знайти імовірність того, що в резонаторі буде збуджено лише задану моду. Граничним переходом одержати формулу Планка.

18. (7) Порівняти тиск речовини і тиск випромінювання в центрі Сонця, де $T = 1.6 \times 10^7$ К, $\rho = 160$ г/см³, масова доля водню $X \approx 0.5$ (решта — гелій). Вказівка: оцінити температуру виродження.
19. (5-10) Знайти ефективну температуру Сонця в наближенні випромінювання абсолютно чорного тіла. Радіус Сонця $R_{\odot} = 6.960 \times 10^{10}$ см, відстань до нього $r = 1.4960 \times 10^{13}$ см, сонячна стала (потік сонячної енергії поблизу Землі за межами атмосфери) $S = 1.366 \times 10^6$ ерг/с см². Чи узгоджується це з положенням максимуму інтенсивності сонячного спектру, розташованого поблизу 500 нм? Яка доля сонячного випромінювання належить видимій області спектру (400–760 нм)? Оцінити повну відносну річну втрату маси Сонця, якщо потік протонів (нерелятивістських) поблизу Землі становить 2.4×10^8 см⁻²с⁻¹ (для спокійного Сонця). Маса Сонця $M_{\odot} = 1.9891 \times 10^{33}$ г.
20. (4) Оцінити відносну річну втрату маси за рахунок теплового випромінювання найяскравіших зір Галактики, типові параметри яких такі: $M = 60M_{\odot}$, $R = 20R_{\odot}$, $T = 40\,000$ К.
21. (10) Знайти теплоємність кристалу в моделі Дебая (лише акустичні гілки в лінійному наближенні спектру).
22. (10) Знайти середньоквадратичне зміщення атомів кристалу в моделі Дебая, якщо кристал складається з атомів лише одного сорту [2, №147].
23. (15) Дослідити фонони одновимірного кристалу з атомів одного сорту.
24. (10) Знайти теплоємність магніонів у феромагнетиках, якщо їх спектр параболічний.

§12. Кінетичні явища

1. (15) Знайти розподіл числа вилетівших за даний проміжок часу в процесі термоелектронної емісії електронів (електрони вилітають незалежно один від одного).
2. (15-30) Частинка блукає на простій кубічній ґратці з дискретним часом, тобто якщо в даний момент частинка знаходилася в якомусь вузлі ґратки, то в наступний момент вона стрибе в один із шести сусідніх вузлів з рівною ймовірністю. Знайти розподіл положення блукаючої частинки після t кроків. Розглянути випадок неперервного часу. (Вказівка: задача розв'язується в просторі довільної розмірності, краще почати з випадку неперервного часу, в кінетичному рівнянні зробити дискретне перетворення Фур'є по просторовій змінній.)
3. (30-50) Модель полімеру складається з N сполучених між собою ланок. Усі довжини ланок і сферичні кути їх сполучень є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами. Знайти середньоквадратичну довжину полімеру, нехтуючи його самоперетинами. Розглянути також границю $N \rightarrow \infty$ і дослідити частинні випадки, коли розподіл кута кручення: а) дзеркально симетричний; б) аксіально симетричний.
4. (20) Оцінити середньоквадратичну довжину лінійного полімера C_nH_{2n+2} (алкани) при великих n .
5. (5) Довести, що частота зіткнень частинок газу з одиницею поверхні ($\Delta N/\Delta t \Delta S$) і створюваний ними тиск на поверхню в даній точці поверхні даються виразами $dv/dS = n \langle v_{n+} \rangle_v$ і $p = 2nm \langle v_{n+}^2 \rangle_v$, де n — концентрація частинок в цій точці, v_n — нормальна компонента швидкості (нормаль напрямлена від газу до поверхні), $w_+ = w\theta(w)$, а усереднення проводиться по швидкостям частинок в даній точці.
6. Знайти частоту зіткнень з поверхнею і тиск для: а) (5) ізотропного розподілу швидкостей; б) (5) класичного газу; в) (5) газу фотонів; г) (15-20) ізотропного розподілу швидкостей, але поверхня рухається зі швидкістю u , зокрема, розглянути класичний газ.
7. (5) Знайти швидкість витікання класичного ідеального газу у вакуум через малий отвір і створювану цим реактивну силу. Знайти прискорення невагомої кулі радіуса 1 м з воднем кімнатної температури, в якій зроблено отвір радіуса 1 мм.
8. (20-40) Знайти частоту ударів об кулю і силу тертя при русі кулі в класичному ідеальному газі. Вказати межі застосовності одержаних результатів.
9. (20) Знайти середню частоту зіткнень і довжину пробігу частинок класичного ідеального газу.
10. (–) Знайти розподіл часу між ударами частинок класичного ідеального газу об поверхню.
11. (10) Знайти густину термоемісійного струму електронів з металу, вважаючи що вибувші електрони миттєво виводяться із системи (формула Річардсона–Дешмана).

Література

- [1] Кондратьев А С, Романов В П, Задачи по статистической физике (М., Наука, 1992)

- [2] Гречко Л Г, Сугаков В И, Томасевич О Ф, Федорченко А М, Сборник задач по теоретической физике (М., Высшая школа, 1984)
- [3] Шиллинг Г, Статистическая физика в примерах (М., Мир, 1976)
- [4] Кубо Р, Термодинамика (М., Мир, 1970)
- [5] Кубо Р, Статистическая механика (М., Мир, 1967)
- [6] Задачи по термодинамике и статистической физике, ред. Ландсберг П (М., Мир, 1974)
- [7] Терлецкий Я П, Статистическая физика (М., Высшая школа, 1994)